

物理工学専攻 入学試験問題

物理学 I

(2問出題, 2問解答)

平成30年8月28日(火) 9:30~11:30

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明の箇所などがあつた場合には申し出ること。
3. 出題された2問とも解答すること。
4. 答案用紙が2枚渡されるから, 1題ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙上方の指定された箇所に, その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号, 符号などを記入した答案は無効とする。
8. 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

- [1] 地表上空で水平方向に速さ v で射出される質量 m の質点を考える。地球は半径 R の一様密度の球体とし、質量は M とする。万有引力定数は G とする。ただし、質点の質量は地球の質量に比べて十分小さいとする ($m \ll M$)。また、質点を射出する地表からの高さは地球の半径よりも十分小さいとし無視せよ。空気抵抗や地球の自転の効果も無視せよ。地球は慣性系とみなして良い。

- [1.1] 質点が地表に落ちずに円運動するときの v の値 v_1 を、 G 、 M 、 R を用いて表せ。
- [1.2] 質点が地球の重力から逃れるとき、すなわち閉軌道を描かないときの v の最小値 v_2 を、 G 、 M 、 R を用いて表せ。
- [1.3] v が $v_1 < v < v_2$ を満たすとき、質点の描く楕円の長軸の長さ L を、 G 、 M 、 R 、 v を用いて表せ。ただし、質点の描く軌道の方程式は、地球の中心を原点とする軌道面内での2次元の極座標表示 (r, θ) で、

$$r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

となることを用いても良い。ここで、 $l = \frac{h^2}{GM}$ 、 $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2h^2 E}{G^2 M^2 m}}$ 、 h は面積速度の2倍 ($h = r^2 \frac{d\theta}{dt}$)、 E は質点の全エネルギー (ただしポテンシャルエネルギーは無限遠での値を0とする)、 θ_0 は座標軸の設定に依存する定数とする。

- [2] 図1のように、同一の質量 m をもつ2つの質点が、質量の無視できる長さ l の棒に繋がれた系 S を考える。系 S の重心は、地球の重心を中心とする円軌道を一定の角速度 ω_0 で周回している。運動座標系を図1のように設定する。すなわち運動座標系の原点を系 S の重心に、 x 軸は円軌道内で地球の重心から系 S の重心への向き、 y 軸は系 S の重心速度の向きに設定し、 z 軸は右手系になるようにとる。質点が xy 面内で運動する場合を考える。地球の重心から系 S の重心を結ぶベクトルを \mathbf{R}_0 として、角度 ϕ を図1のように定義する。万有引力定数を G 、地球の質量を M 、 $m \ll M$ として以下の問いに答えよ。

- [2.1] 系 S の周回運動の角速度 ω_0 を、 G 、 M 、 $R_0 \equiv |\mathbf{R}_0|$ を用いて表せ。
- [2.2] z 軸まわりでの系 S の慣性モーメント I を求めよ。
- [2.3] z 軸まわりでの系 S に働く力のモーメントは、 l が R_0 よりも十分小さいとき、 $N_z = \square l^2 \omega_0^2$ と求められる。 \square に入る $l^2 \omega_0^2$ の係数を、 m 、 ϕ を用いて表せ。ここで、力のモーメントは万有引力からのみ働く。
- [2.4] 系 S の相対運動の平衡点 ($N_z = 0$) での ϕ の値 ϕ_0 を、 $0 \leq \phi_0 < 2\pi$ の範囲ですべて求めよ。また、安定な平衡点 ϕ_0 の周りでの ϕ の微小振動の角振動数を、 ω_0 を用いて表せ。

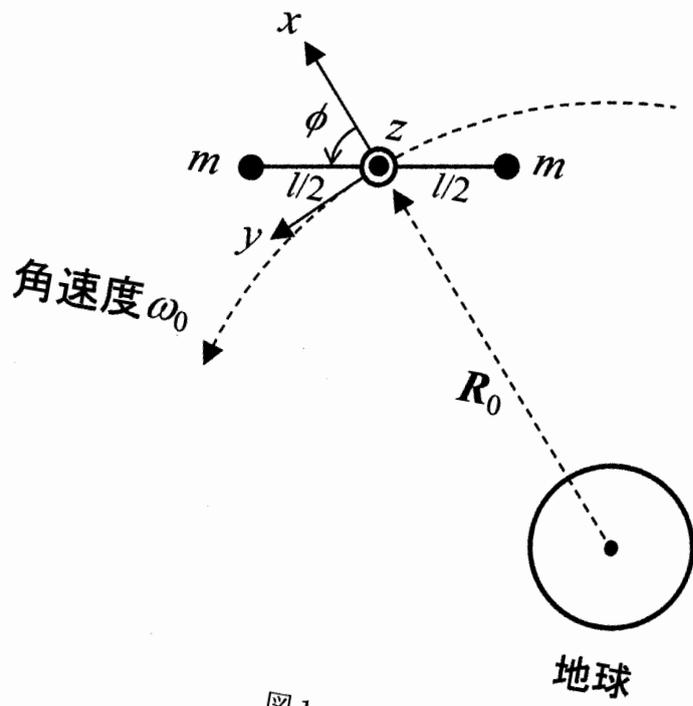


图 1

第2問

[1] 図1のように、真空中に置かれた半径 R 、高さ L の円盤状の金属小片の中心軸方向に、空間的に一様な磁場を印加する場合を考える。磁場は周波数 f で振動しており、その磁束密度は図1の上向きを正として $B(t) = \mu_0 H_0 \sin(2\pi f t)$ と表される。ここで真空の透磁率を μ_0 とおき、 t を時刻とする。金属小片は磁化しないと考え、以下の問いに答えよ。ただし簡単のために、金属小片における表皮効果は考えない。金属小片の熱容量 C と電気抵抗率 ρ は、周波数や温度に依存しないものとする。

[1.1] 図2のように、金属小片中の、微小な厚み dr を持つ半径 r の円筒状の領域について考える。磁束密度の時間変化により誘起される、円筒の円周方向に生じる電場 E の表式を求めよ。ただし、 E は上から見て反時計回りを正とする。

[1.2] 次に金属小片全体を考える。振動磁場により金属小片は加熱される。この誘導加熱に費やされる電力 P の表式を求めよ。

[1.3] 振動磁場を1秒間印加したとき、金属小片の温度上昇を有効数字1桁で示せ。ここで $H_0 = 8 \times 10^4 \text{ A m}^{-1}$ 、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ V s m}^{-1}$ 、 $R = 0.01 \text{ m}$ 、 $L = 0.001 \text{ m}$ 、 $\rho = 4 \times 10^{-8} \text{ } \Omega \text{ m}$ 、 $f = 10 \text{ Hz}$ 、 $C = 0.5 \text{ J K}^{-1}$ とする。また金属小片から熱は逃げないと仮定する。

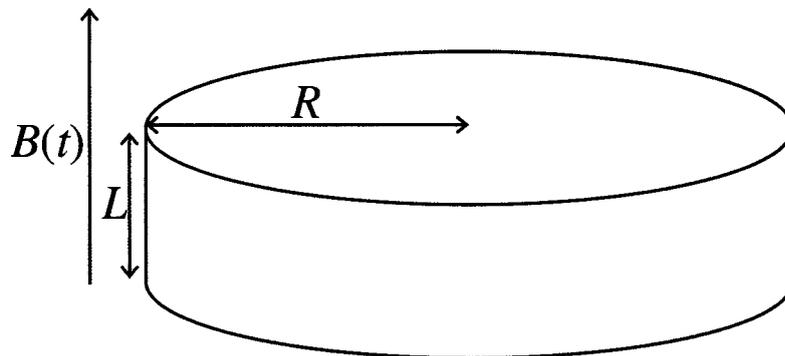


図1

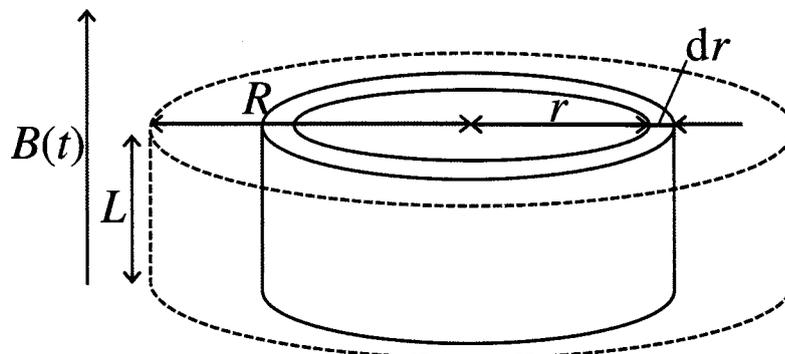


図2

[2] 次に、真空中で大きさが I で半径 a の円環電流が作る磁場を考える。円環の中心軸を x 軸とする。真空の透磁率を μ_0 とおき、導線の太さは無視できるとする。以下の問いに答えよ。

- [2.1] $x = 0$ の平面上に円環電流を配置する。図3に示すように電流が流れているとき、 x 軸上の点 Q での磁束密度の大きさを、その座標 x の関数で示せ。
- [2.2] 図4のように円環電流を一つずつ、 $x = -b$ と $x = b$ の平面上に配置する。2つの円環電流の向きが図4のように逆のとき、 x 軸上の点 Q における磁束密度の大きさを座標 x の関数で示せ。さらに原点 O 近傍での磁束密度の大きさを x の1次の項まで求めよ。ここで b は正とする。
- [2.3] 図4の配置で、右側の円環電流の向きを反転させ、2つの円環電流が同じ向きに流れている場合を考える。原点 O 近傍での x 軸上の点 Q における磁束密度の大きさを座標 x の2次の項まで求め、2次の項を0とするような a と b が満たすべき関係式を示せ。

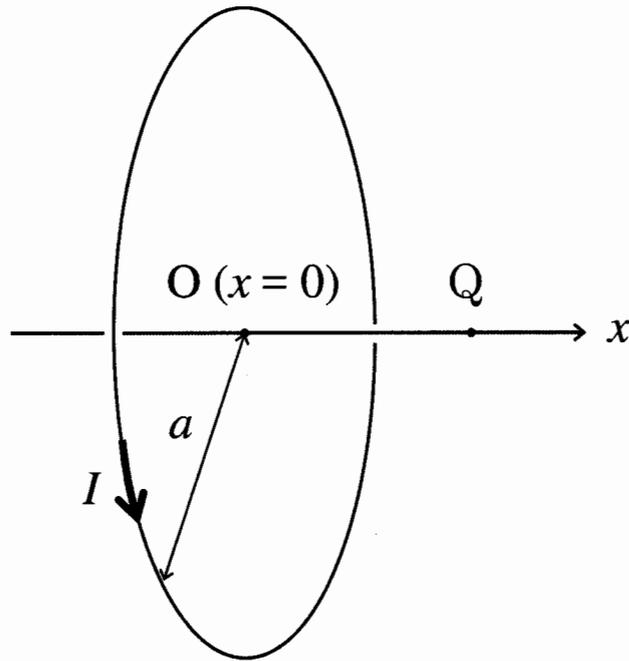


図3

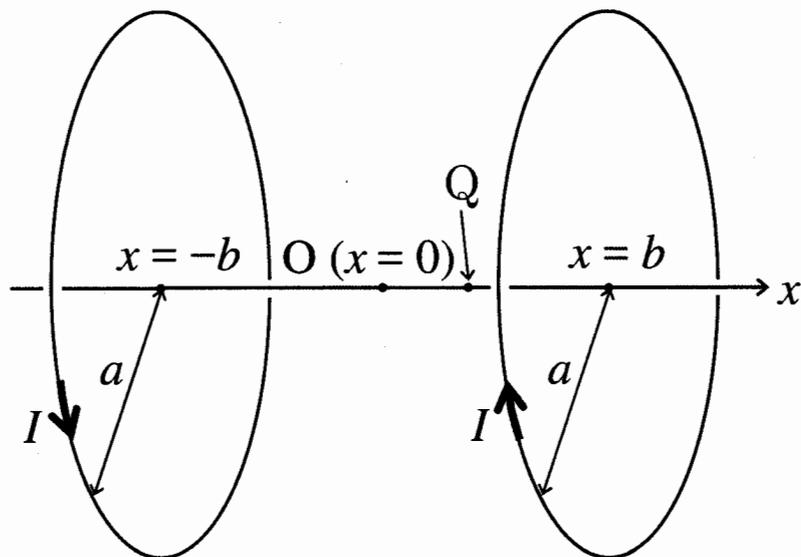


図4

物理学専攻 入学試験問題

物理学Ⅱ

(4問出題, 3問解答)

平成30年8月28日(火) 13:00~16:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 出題された4問のうちから3問を選び解答すること。
4. 答案用紙が3枚渡されるから、1題ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙上方の指定された箇所に、その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号、符号などを記入した答案は無効とする。
8. 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

デルタ関数 $\delta(x)$ で表されるポテンシャル障壁 $U(x) = \alpha\delta(x)$ ($\alpha > 0$) によって散乱される、質量 m の粒子のシュレーディンガー方程式に従う量子力学的な1次元運動を考える。ただし、波束は空間的に十分に広がっているものとし、粒子を、エネルギー $E(> 0)$ の単色平面波で考える。また、スピンなどの粒子の内部自由度は無視できるものとする。プランク定数 h を 2π で割ったものを \hbar 、粒子の波数を $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ 、無次元の変数 C を $C = m\alpha/(\hbar^2 k)$ として、以下の問いに答えよ。

[1] 図1のように、波数 k の粒子が $x < 0$ から原点に入射したとする。ここで、透過係数を t 、反射係数を r とする。

[1.1] 波動関数 $\psi(x)$ の $x = 0$ における境界条件を求めよ。ここで、 $\psi(x)$ の位置座標に関する微分係数の境界条件は、シュレーディンガー方程式 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$ を $x = 0$ 近傍の微小範囲で積分することによって得られることに注意せよ。

[1.2] 透過係数 t および反射係数 r を C の関数として求めよ。

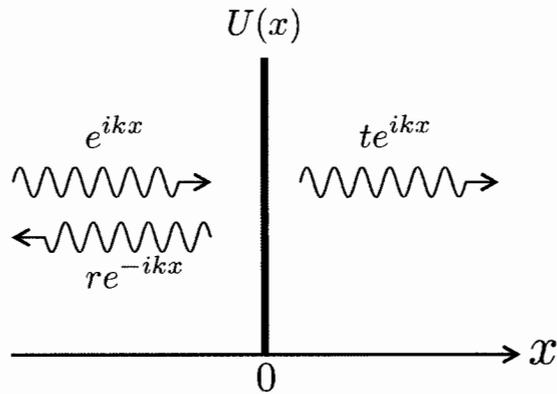


図1

[2] エネルギー E の相互作用をしない同種の2粒子が互いに逆方向から原点に入射して干渉したとする。右向き進行波を $\psi_+(x)$ 、左向き進行波を $\psi_-(x)$ とすると、散乱により1粒子状態は、前問の t, r を用いて

$$\psi_+(x) \rightarrow t\psi_+(x) + r\psi_-(x)$$

$$\psi_-(x) \rightarrow r\psi_+(x) + t\psi_-(x)$$

と変化することに注意せよ。

[2.1] 2体の波動関数が位置座標の交換に対して反対称な場合、 α や E の値に関わらず、2粒子は必ず互いに反対方向に散乱されることを示せ。

[2.2] 2体の波動関数が位置座標の交換に対して対称な場合、2粒子は $\alpha \rightarrow 0$ または $\alpha \rightarrow \infty$ では互いに反対方向に散乱されることを示せ。また、 α がある値 α_0 のときには2粒子が必ず同方向に散乱されることを示し、 α_0 を E の関数として求めよ。

図2のように、 $x = L(> 0)$ の点に $U(x)$ と同形のポテンシャル障壁 $U_L(x) = \alpha\delta(x - L)$ を加える。

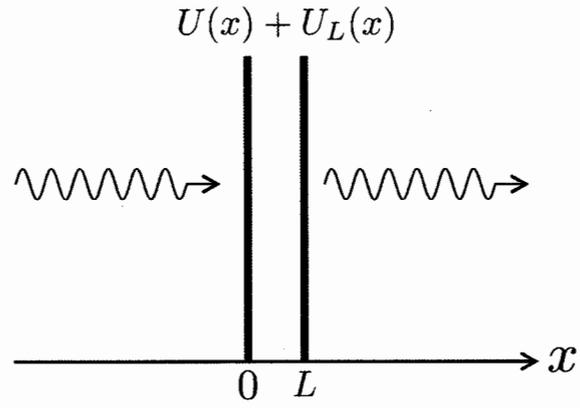


図 2

- [3] $x < 0$ から入射する粒子の $x > L$ への透過率が 1、 $x < 0$ への反射率が 0 になったとする。 L を k, C の関数として求めよ。

第2問

体積 V の容器の中に閉じ込められた N 個の同種古典粒子からなる系の、温度 T での熱平衡状態を考える。この系のふるまいはファンデルワールスの状態方程式

$$P = \frac{nk_B T}{1 - bn} - an^2 \quad (1)$$

でよく記述される。ここで $n = N/V$ は粒子数密度、 k_B はボルツマン定数を表し、また a 、 b は正の定数である。

[1] 状態方程式 (1) は、ある温度 $T = T_c$ かつある粒子数密度 $n = n_c$ において、

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T = 0 \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right)_T = 0 \quad (2)$$

となる。 T_c 、 n_c を求め、その点での圧力 P_c も求めよ。

[2] $T > T_c$ かつ $n = n_c$ の場合の等温圧縮率 K_T

$$K_T = -\frac{1}{V} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \quad (3)$$

を、 k_B 、 n_c 、 T 、 T_c を使って書き表せ。

次にファンデルワールスの状態方程式 (1) を導出する。この系の粒子 i ($i = 1, 2, \dots, N$) の座標を $\mathbf{r}_i = (r_{ix}, r_{iy}, r_{iz})$ 、運動量を $\mathbf{p}_i = (p_{ix}, p_{iy}, p_{iz})$ とする。粒子の質量を m とする。粒子は二体の中心力ポテンシャル $u(r)$ (r は粒子間距離) により相互作用している。 ℓ 、 ε を正の定数として、 $u(r)$ は

$$u(r) = \begin{cases} +\infty & (r < \ell) \\ -\varepsilon \cdot (\ell/r)^6 & (r \geq \ell) \end{cases} \quad (4)$$

とする。この場合、この系のエネルギー E は、

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N u(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (5)$$

と書き表される。

h をプランク定数として、

$$Z_0(T, V, N) = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} \prod_{i=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_{ix} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{iy} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{iz} \exp\left(-\frac{1}{k_B T} \cdot \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}\right) \right] \quad (6)$$

$$A(T, V, N) = \frac{1}{V^N} \int_V d\mathbf{r}_1 \int_V d\mathbf{r}_2 \cdots \int_V d\mathbf{r}_N \exp\left[-\frac{1}{k_B T} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N u(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)\right] \quad (7)$$

とする。ここで座標についての積分 $\int_V d\mathbf{r}_i$ は容器の内部全体にわたる積分を表す。すると、この系の分配関数 $Z(T, V, N)$ は、 $Z(T, V, N) = Z_0(T, V, N) \cdot A(T, V, N)$ と書き表される。

$Z_0(T, V, N)$ は粒子間の相互作用がない理想気体の場合の分配関数であり、 $F_0(T, V, N) = -k_B T \log Z_0(T, V, N)$ は理想気体のヘルムホルツ自由エネルギーである。以下では N は大きいとして、 $\log(N!) \approx N(\log N - 1)$ と近似せよ。また、公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (8)$$

を使ってよい。

- [3] $F_0(T, V, N)$ を T, V, N, m, k_B, h を使って書き表せ。得られた F_0 から理想気体の圧力 P_0 、エントロピー S_0 、化学ポテンシャル μ_0 、内部エネルギー U_0 を求めよ。

以下ではこの系のヘルムホルツ自由エネルギーを、高温 ($\varepsilon \ll k_B T$) かつ低密度の場合に近似的に求めることを考える。

粒子は相互作用ポテンシャル (4) が無限大となる配置をとることはできない。すなわち 1 粒子の周りには他の粒子が入ることができない領域がある。1 粒子あたりのこの領域の体積を v とし、排除体積と呼ぶ。低密度を考えているので 3 粒子以上がかかわることによる排除体積への影響は無視し、2 粒子間だけによる効果を考えるものとする、 $v = 2\pi\ell^3/3$ となる。さらに高温 ($\varepsilon \ll k_B T$) かつ低密度で式 (7) の A を

$$A \approx \left(\frac{V - Nv}{V} \right)^N \left[1 - \frac{4\pi}{V} \int_{\ell}^{\infty} r^2 \frac{u(r)}{k_B T} dr \right]^{N(N-1)/2} \quad (9)$$

と近似する。この式 (9) を使って、以下の問いに答えよ。

- [4] この系のヘルムホルツ自由エネルギー $F(T, V, N)$ を $T, V, N, \varepsilon, m, v, k_B, h$ を使って書き表せ。
- [5] この系の圧力 P を $T, n, \varepsilon, v, k_B$ を使って書き表せ。
- [6] ファンデルワールスの状態方程式 (1) の定数 a および b を、 ε および v を使って書き表せ。

第3問

xy 平面に平行な境界面をもつ屈折率 n_g の半無限の厚みをもつガラスへ向けて、屈折率 n_0 の空気中から角周波数 ω の平面電磁波を垂直入射する。物質中のマクスウェル方程式のうちの1つは \mathbf{E} を電場、 \mathbf{H} を磁場、 μ を媒質の透磁率として $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ で与えられる。以下では簡単のため、すべての媒質の透磁率 μ は真空の透磁率 μ_0 に等しいとする。また媒質はすべて均質、等方的であり、媒質中の電磁波の吸収は無いものとする。真空中の光速を c とし、電磁波は複素数表示を用いて記述する。このとき以下の問いに答えよ。

- [1] まず、図1のように空気中からガラスに電磁波を垂直入射する場合を考える。このとき、空気とガラスの境界面は $z = 0$ とする。入射電場は y 成分のみをもち、 $E^{(i)}(z, t) = E_0^{(i)} \exp[-i(\frac{\omega n_0}{c}z + \omega t)]$ と表せるとする。この場合、入射磁場は x 成分のみをもち、 $H^{(i)}(z, t) = H_0^{(i)} \exp[-i(\frac{\omega n_0}{c}z + \omega t)]$ と表せる。
- [1.1] 入射磁場の振幅 $H_0^{(i)}$ を $E_0^{(i)}$ を用いて表せ。
- [1.2] 境界接線方向における電場および磁場の境界条件を記せ。ただし、表面電流の効果は無視する。また入射電場 $E_0^{(i)}$ に加え、反射、透過電場の y 成分の振幅をそれぞれ $E_0^{(r)} \equiv E^{(r)}(z=0, t=0)$, $E_0^{(t)} \equiv E^{(t)}(z=0, t=0)$ とし、入射磁場 $H_0^{(i)}$ に加え、反射、透過磁場の x 成分の振幅をそれぞれ $H_0^{(r)} \equiv H^{(r)}(z=0, t=0)$, $H_0^{(t)} \equiv H^{(t)}(z=0, t=0)$ とする。
- [1.3] 振幅反射係数は $r_0 = E_0^{(r)}/E_0^{(i)}$ で与えられる。このとき振幅反射係数を n_0, n_g を用いて表せ。



図1

- [2] 次に、図2のようにガラス上に誘電体多層膜を作製する。多層膜は $2N$ 層からなり、すべての境界面は xy 平面に平行であるとする。このとき、境界面を入射側から順に $0, 1, 2, \dots, l-1, l, \dots, 2N-1, 2N$ とする。境界面 l の z 座標を z_l とし、境界面 $l-1$ と l で挟まれた屈折率 n_l の層を第 l 層と呼ぶ。ここで空気中を第0層とした。電磁波はそれぞれの界面に垂直に伝搬する。第 l 層における電場は y 成分のみを持ち、磁場は x 成分のみを持つものとし、それぞれ以下の式で書き表す。

$$E_l(z, t) = \left\{ E_l^{(-)} \exp\left[-i\frac{\omega n_l}{c}(z - z_l)\right] + E_l^{(+)} \exp\left[i\frac{\omega n_l}{c}(z - z_l)\right] \right\} \exp(-i\omega t),$$

$$H_l(z, t) = \left\{ H_l^{(-)} \exp\left[-i\frac{\omega n_l}{c}(z - z_l)\right] + H_l^{(+)} \exp\left[i\frac{\omega n_l}{c}(z - z_l)\right] \right\} \exp(-i\omega t).$$

[2.1] $H_l^{(-)}, H_l^{(+)}$ をそれぞれ $E_l^{(-)}, E_l^{(+)}$ を用いて表せ。

[2.2] 境界面 $l-1$ における電磁波の境界条件を考えることで、 $l=1, 2, \dots, 2N$ で成り立つ以下の漸化式を導き、係数 α_l を求めよ。ただし、第 l 層の厚みを d_l として $\Delta_l = \frac{n_l \omega d_l}{c}$ と定義する。

$$\frac{E_{l-1}^{(-)} - E_{l-1}^{(+)}}{E_{l-1}^{(-)} + E_{l-1}^{(+)}} = \alpha_l \frac{E_l^{(-)} e^{-i\Delta_l} - E_l^{(+)} e^{i\Delta_l}}{E_l^{(-)} e^{-i\Delta_l} + E_l^{(+)} e^{i\Delta_l}}$$

[2.3] 屈折率 n_L の材料でできた層 (L) と屈折率 n_H の層 (H) を交互に $2N$ 層積層して、空気側から順に LHLHL...HLH とした多層膜をガラスの反射防止膜として用いる。ここで、各層 l は $\Delta_l = \frac{\pi}{2}$ を満たす厚みの膜とする。このとき、振幅反射係数 $r_1 = E_0^{(+)} / E_0^{(-)}$ および反射防止条件を n_0, n_g, n_L, n_H, N を用いて表せ。

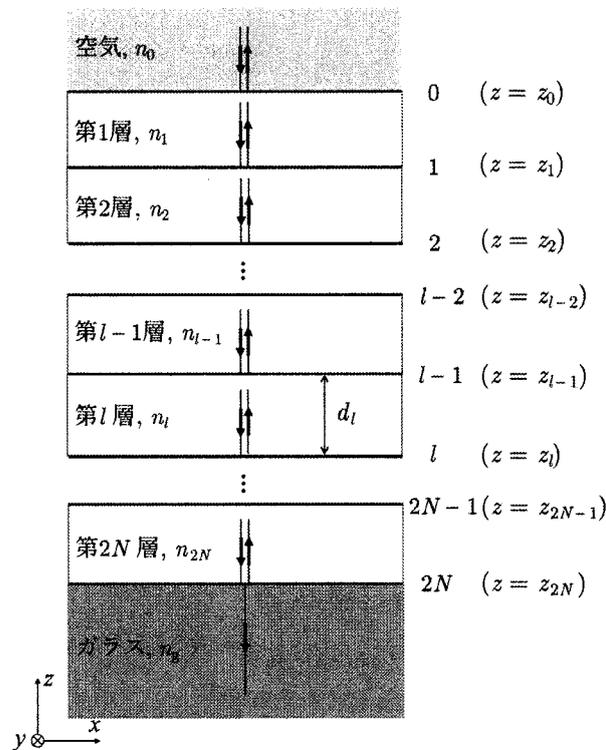


図 2

第4問

真空中に面積 A 、厚さ L の金属厚板 M と、 M と同一の形状を有する n 型半導体厚板 S が図1のように板面を揃えて平行に置かれている。 $A \gg L^2$ とする。 S 中の伝導バンドには、不純物ドナーから励起された電子がいる。 M と S の間隙は d であり、 d は $A \gg d^2$ を満たすとする。図2で示したエネルギーダイアグラムのように、真空準位から測った孤立した M の電子の化学ポテンシャルを $-W$ 、真空準位から測った孤立した S の伝導バンド下端のエネルギーを $-\chi_c$ 、 S 中の電子の化学ポテンシャルを $-\phi_s$ 、 S の価電子バンド上端のエネルギーを $-\chi_v$ とする ($W > 0$ 、 $\chi_v > \phi_s > \chi_c > 0$)。また、電子の電荷を $-e$ とし、真空の誘電率を ϵ_0 とする。 M や S 内部はそれぞれ均一で等方的であり、表面や界面特有の準位形成の効果は考えない。また、 M のフェルミ面における状態密度、 S のバンドギャップ、 S の伝導バンド下端及び価電子バンド上端の有効質量はそれぞれの電子数が変化しても変わらないとし、真空中への電子放出はないものとする。 M 及び S は変形しないものとする。

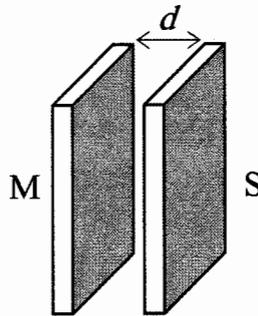


図1

[1] M と S を太さの無視できる導線で結んだところ、導線を通して M と S との間で電荷の移動が生じ、 M と S の対向面上には電荷面密度 $-\rho$ 、 ρ がそれぞれ誘導された。[1] では誘導された電荷蓄積層の厚さは無視できるとして良い。

[1.1] 化学ポテンシャルの熱力学的定義を述べ、電荷が移動した理由を説明せよ。

[1.2] ρ の大きさを求めよ。

[1.3] M と S が引きあう力の大きさを、 $|W - \phi_s|$ を用いて表せ。

[1.4] M と S の間隙を d の周りで $d + \delta \sin(\Omega t)$ のように振動させたところ、 M と S の間に振幅 I_0 の振動電流が現れた。 t は時刻である。 M 、 S 、及び導線の電気抵抗及び自己インダクタンスは十分小さいとする。 $|W - \phi_s|$ を用いて I_0 を表せ。ただし $\delta \ll d$ とし、 δ/d の1次まで求めよ。

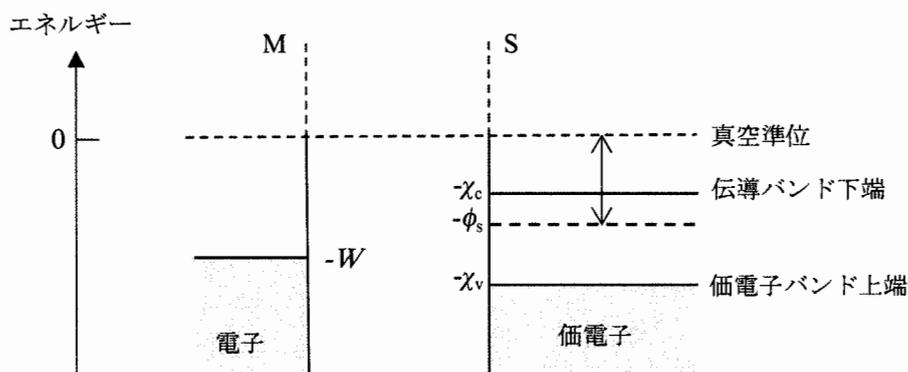


図2

[2] 次に、MとSの接合を考える。 $W > \phi_s > \chi_c$ のとき、MとSとの接合面近傍に図3のエネルギーダイアグラムで示すような電子状態が空間変化した電荷空乏層と呼ばれる領域が形成される。電荷空乏層が形成される理由は、接合面付近の不純物ドナーのイオン電荷が現れるためである。MとSの接合面を x 座標軸原点とし、接合面法線のMからSへ向かう向きを x 座標軸の正の向きとする。

[2.1] Sからみた接合面でのポテンシャル障壁の高さ Δ_s を求めよ。

[2.2] S中の接合面から十分に離れた点とMとの間にかけての電圧を変化させながら、接合に流れる電流を測定すると、整流特性（電圧を印加したときに現れる電流の大きさが電圧の符号に依存する性質）がみられた。この理由を、接合面近傍の電子状態に基づいて説明せよ。S中の伝導電子のエネルギー分布は、マクスウェル・ボルツマン分布関数で近似できることも考慮せよ。

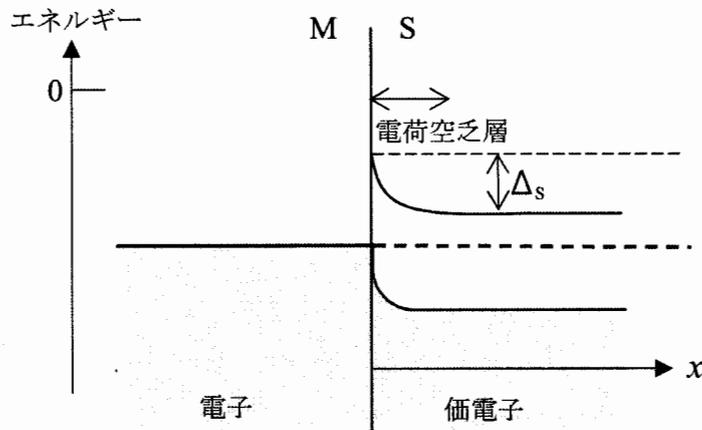


図3