物理工学専攻
入学試験問題

物理学 I

（２問出題，２問解答）

平成２７年９月１日（火）　９：３０～１１：３０

注意事項

1．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3．出題された２問とも解答すること。
4．答案用紙が２枚渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6．草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

質量 m_1 の質点を長さ l_1 の棒の先にとりつけた単振り子を考える (図 1)。棒は自由に振動できるように天井に固定されており、また棒は硬く、その質量は無視できるものとする。重力加速度の大きさを g とし、運動は xy 平面内で起こるものとする (x は水平方向、y は鉛直上向き方向)。

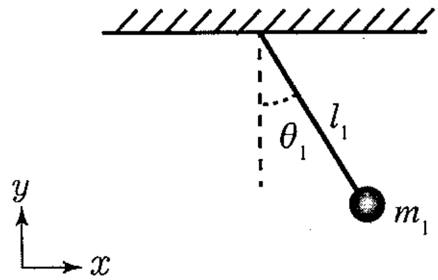

図 1

[1] この質点の運動を記述する運動方程式を導け。振動の振幅が小さい場合には、質点の運動は単振動となり、その角周波数が $\omega_0 = \sqrt{g/l_1}$ で与えられることを示せ。

[2] なぜ角周波数 ω_0 は m_1 に依存しないのかを定性的に考察せよ。また、平衡位置にある質点に対して、ある撃力で単振動を起こしたときに、m_1 の違いがどのように単振り子の振動に影響するのかを定性的に説明せよ。

次に、図 1 に加えて長さ l_2 の棒で質量 m_2 の質点を図 2 のようにとりつけた状況を考える。ただし、この長さ l_2 の棒は硬く、質量は無視でき、質量 m_1 の質点の周りで自由に xy 平面内で振動できるものとする。

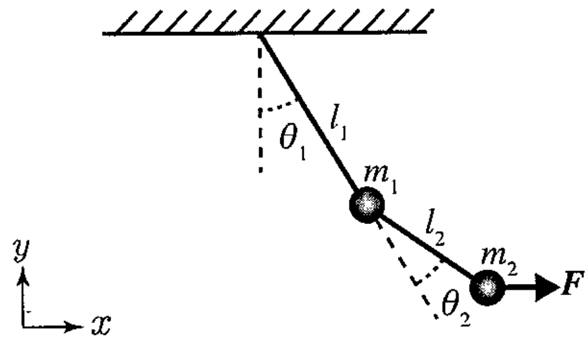

図 2

[3] 質量 m_2 の質点に x 軸方向に一定の力 $\boldsymbol{F} = (F_x, 0)$ を加えて図 2 のようにつり合ったとする。この平衡状態における角度 θ_1 と θ_2 を求めよ。なお、θ_1 と θ_2 は微小とは限らないものとする。

[4] 設問 [3] の平衡状態から力 $\boldsymbol{F}$ を取り除くと質点は運動を始める。$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ の場合に運動を記述するラグランジアンを導け。ただし、質点の質量が等しく ($m_1 = m_2 = m$)、かつ棒の長さも等しい ($l_1 = l_2 = l$) とする (図 3)。

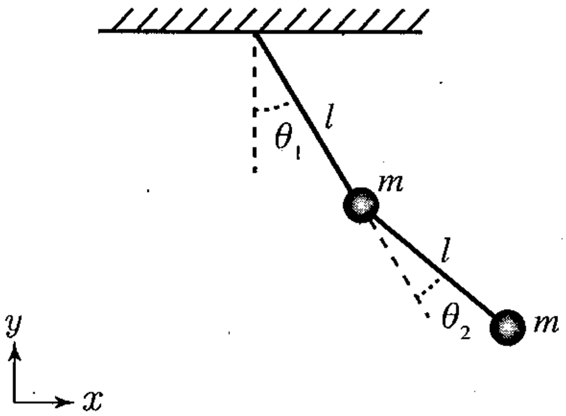

図 3

[5] 設問 [4] で導いたラグランジアンにおいて、振れ角 θ_1 と θ_2、角速度 $d\theta_1/dt$ と $d\theta_2/dt$ (t は時間) がともに微小であるとして、運動方程式を求めよ。

[6] 設問 [5] で求めた運動方程式から、この系が角周波数 $\omega = \omega_0\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$ の 2 つの基準振動をもつことを示せ。

第２問

磁束密度ベクトル (B_x, B_y, B_z) が

$$B_x = B_0 \alpha z,\ B_y = 0,\ B_z = B_0(1+\alpha x)$$

（B_0 と α は正の定数）で表されるような磁場中に置かれた半径 a の円形の導体リングを考える。このリングは、太さの無視できる導線で作られており、質量を m、一周の電気抵抗を R とする。また、リングは電気的に中性で、変形することはなく、自己インダクタンスの影響は無視できるものとする。リングには一様な電流が流れるものとする。

図１に示すように、リングは xy 平面上（$z=0$）に置かれ、その中心は常に x 軸上にあり、回転せずに x 軸に沿って運動する。リングの中心の x 座標を X で表す。摩擦の影響は無視できるものとする。

[1] このリングを貫く磁束 Φ を X の関数として求めよ。

[2] このリングに x 方向に一定の力を加えたところ、一定の速度 $V(>0)$ で運動し、リングには電流が流れた。この電流 I を求めよ。ただし、電流は図１の反時計周りに流れた場合を正とする。

[3] このリングに加えた力の大きさ F を求めよ。

次に、磁場が時間的に変化する場合を考える。磁束密度ベクトルの z 成分が

$$B_z = B_0 b(t)(1+\alpha x)$$

で与えられるものとする。ここで、$b(t)$ は

$$b(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau} & (0 \leqq t < \tau) \\ 1 & (\tau \leqq t) \end{cases}$$

という変化をする時刻 t の関数である（$\tau > 0$）。$t=0$ でリングの中心は原点で静止していた。

[4] リングの運動方程式を整理すると

$$\alpha \frac{d^2 X}{dt^2} = -\lambda b(t) \frac{d}{dt}\left[b(t)(1+\alpha X)\right] \tag{1}$$

の形で与えられることを示し、λ を求めよ。

[5] $0 \leqq t < \tau$ の場合に、式 (1) の解を t のべき級数の形、つまり、

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

で求めることを考える。$a_0 = a_1 = a_2 = 0$ となることを説明せよ。

τ が $1/\lambda$ に比べて十分小さいときには、$0 \leqq t < \tau$ の場合に、式 (1) の解に対して $X = a_3 t^3$ という近似が成り立つ。この条件の下で、以下の問いに答えよ。

[6] a_3 を求めよ。また、 $t = \tau$ でのリングの速度 V_0 を求めよ。

[7] $t \to \infty$ では、リングは静止する。そのときのリングの中心の位置を求めよ。

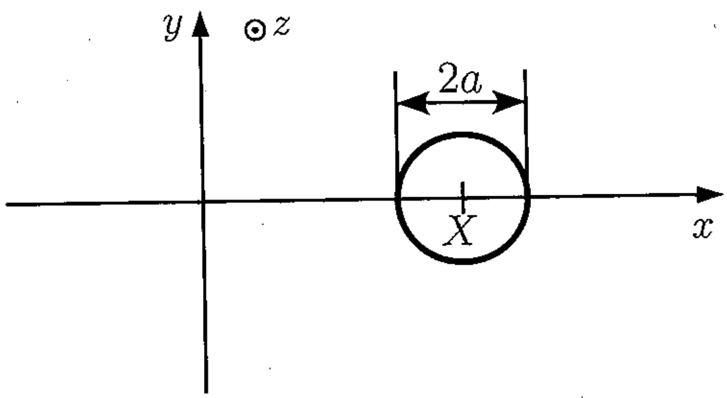

図 1

物理工学専攻
入学試験問題

物理学 II

（４問出題，３問解答）

平成２７年９月１日（火）　１３：００～１６：００

注意事項

1．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3．出題された４問のうちから３問を選び解答すること。
4．答案用紙が３枚渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6．草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

質量 m、角周波数 ω の1次元調和振動子を考える。この系のハミルトニアンは、位置演算子 $\hat{x}$、運動量演算子 $\hat{p}$ を用いて

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

で与えられる。このハミルトニアンの固有エネルギーは $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$ である。ただし、n は非負の整数、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。生成演算子 $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right)$、消滅演算子 $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right)$ を導入すると、その交換関係は $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$ である。このとき、数演算子 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ に対し、ハミルトニアンは $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N}+1/2)$ と書ける。

[1] 交換関係 $[\hat{N}, \hat{a}]$ を求めよ。0以上の任意の整数 n に対して、$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ となる適当な固有状態 $|n\rangle$ が、$\hat{a}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}|n\rangle$ を満たすことを示せ。また、$\hat{a}|0\rangle = 0$ が成り立つことを示せ。1次元調和振動子ではエネルギー準位の縮退がないことは既知とする。

[2] α を任意の複素数とするとき、状態

$$|\Psi(\alpha)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

が、消滅演算子 $\hat{a}$ の規格化された固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。

[3] 状態 $|\Psi(\alpha)\rangle$ のエネルギー期待値 $\langle\hat{H}\rangle$ を求めよ。

[4] 状態 $|\Psi(\alpha)\rangle$ に対する、位置と運動量の期待値 $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$ と、位置と運動量の偏差の2乗平均平方根 $\Delta x = \sqrt{\left\langle(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle)^2\right\rangle}$, $\Delta p = \sqrt{\left\langle(\hat{p}-\langle\hat{p}\rangle)^2\right\rangle}$ を求めよ。これから積 $\Delta x\Delta p$ の値を計算せよ。

[5] 時刻 $t=0$ で、振動子は $|\Psi(\alpha_0)\rangle = e^{-|\alpha_0|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$ の状態にあるとする。ただし、$\alpha_0 = Ae^{i\theta}$ とし、A と θ は正の実数とする。時刻 $t(>0)$ で振動子の状態は $e^{-i\omega t/2}|\Psi(\alpha(t))\rangle$ という形で書けることを示し、$\alpha(t)$ を A, θ, ω, t を用いて表せ。

[6] 設問 [5] で求めた振動子の状態について、時刻 t での位置と運動量の期待値 $\langle\hat{x}\rangle_t$, $\langle\hat{p}\rangle_t$ を求めよ。この状態は準古典的状態と呼ばれる。$A \gg 1$ のときの振る舞いを考えることで、この理由を説明せよ。

第2問

1モルの気体の膨張に伴う温度変化を考える。P を圧力、V を体積、R を気体定数、T を熱力学的温度、U を内部エネルギー、$H=U+PV$ をエンタルピー、S をエントロピー、$C_P=\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$ を定圧比熱、$\alpha=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P>0$ を熱膨張率として、以下の設問に答えよ。必要であれば、マクスウェルの関係式 $\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T=-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ を用いてもよい。

[1] 気体の可逆的な断熱膨張として、準静的断熱膨張を考える。これは等エントロピー過程であり、圧力を微小変化させたときの温度変化の割合は、係数 $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S$ で与えられる。これが $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S=\frac{TV\alpha}{C_P}$ と表されることを示せ。また、$PV=RT$ に従う理想気体の場合の α を求めよ。なお、S は P と T の関数であり、$dS=\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP+\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT$ で表せるとする。

[2] 気体の不可逆的な断熱膨張として、ジュール・トムソン膨張を考える。これは、図1に示すように、細孔栓を通して左側の高圧の領域（圧力 P_1）から右側の低圧の領域（圧力 P_2）に気体を移す過程のことである。このとき、気体はピストン1とピストン2を調節することによって、P_1 と P_2 を一定に保ちながら移動する。その際、気体の体積と温度は始状態の V_1, T_1 から終状態の V_2, T_2 へと変化し、気体とそれ以外の部分の間では、熱のやりとりはないものとする。この過程ではエンタルピー H が一定であることを示せ。

[3] 設問 [2] のような等エンタルピー過程において、気体の圧力変化が微小であるときの温度変化の割合は、ジュール・トムソン係数 $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$ で与えられる。これを C_P, T, V, α で表し、設問 [1] で求めた $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S$ と比較して、$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H<\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S$ となることを示せ。また、理想気体のジュール・トムソン係数を求めよ。なお、H は P と T の関数であるとする。

次に、以下の状態方程式に従う実在気体を扱い、その膨張に伴う温度変化を考える。

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT \tag{1}$$

ここで a および b は正の定数であり、それぞれ分子間引力の寄与および排除体積を意味する。$V\gg b$ および $T\geqq T_{\mathrm{B}}\left(\equiv\frac{a}{Rb}\right)$（ボイル温度）の両方が成り立つ範囲内において、以下の設問に答えよ。

[4] まず、理想気体からのずれを考える。式 (1) が $\left(\frac{b}{V}\right)$ のべき級数のうち一次の項までを用いて $PV\approx RT\left\{1+B(T)\left(\frac{b}{V}\right)\right\}$ で表されるとして、$B(T)$ を a, b, R, T で表せ。また、ボイル温度 T_{B} の意味を考察せよ。

[5] 次に、ジュール・トムソン膨張に伴う温度変化を考える。$V\approx\frac{RT}{P}+B(T)b$ と近似できるとして、ジュール・トムソン係数を C_P, a, b, R, T で表せ。また、ジュール・トムソン係数の符号が変化する温度（逆転温度）T_{inv} を求めよ。

[6] $T>T_{\mathrm{inv}}$ の温度範囲ではジュール・トムソン係数は負になり、膨張に伴って気体の温度が上昇する。これは分子間引力に起因する a の寄与に比べて排除体積 b の寄与が大きくなるからである。いま a の寄与が無視できるとして、温度が上昇する理由を考察せよ。

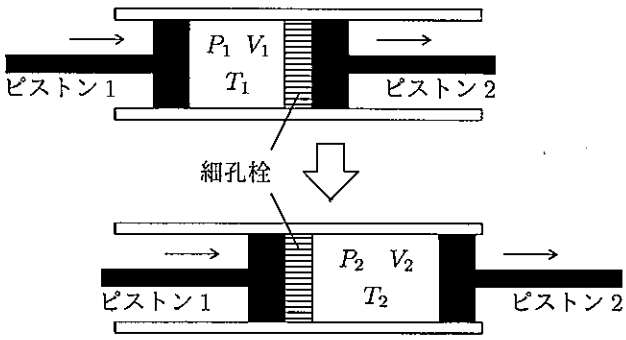

図 1

第3問

等方的な媒質中の電磁波の伝搬について考える。以下、真空の誘電率を ε_0、真空の透磁率を μ_0 とする。

電場ベクトルが、k を波数、ω を角周波数として、

$$\boldsymbol{E} = (E, 0, 0) \tag{1}$$

$$E = E_0 \exp\left[i\left(kz - \omega t\right)\right] \tag{2}$$

と表わされる電磁波を考える。ここで E_0 は定数である。このとき、マクスウェルの方程式から、

$$\nabla^2 E - \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

が成り立つことが導かれる。ここで、媒質の誘電率 ε は ω の関数である。また媒質中の荷電粒子が電磁波の磁場成分から受ける力は無視してよいものとし、媒質の透磁率は μ_0 に等しいとした。以下、エネルギーの散逸は無いものとする。

まず誘電体中の電磁波を考える。ここでは誘電体を数密度 N で一様に分布した独立な調和振動子の集合であるとして扱う。個々の調和振動子は、空間的に固定された原子核に束縛された、質量 m 、電荷 $-e$ を持つ電子から成り立っているとする。この調和振動子の共振角周波数は ω_0 であるとする。また電子の変位ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とし、外場が無いときの平衡での値を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とする。電子の運動は古典力学に従うものとする。

[1] 電子の変位ベクトル $\boldsymbol{x}$ が従う運動方程式を書け。

[2] この誘電体のマクロな分極 $\boldsymbol{P}$ が設問 [1] の運動方程式に従う調和振動子のみで作られるとした場合に、電磁波の電場成分 $\boldsymbol{E}$ と、それにより誘起される分極 $\boldsymbol{P}$ の関係を表す微分方程式を求めよ。

[3] 式 (1) の $\boldsymbol{E}$ に対して、物質内に誘起される分極 $\boldsymbol{P}$ も電磁波と同じく、

$$\boldsymbol{P} = (P, 0, 0) \tag{4}$$

と書け、電磁波と同じ角周波数で振動するものとする。設問 [2] の結果を用いて、E と P の間に成り立つ関係式を求めよ。

[4] この誘電体中の電磁波が満たす、k と ω の関係を求めよ。

[5] k の実部と虚部を ω の関数として求め、その概形をグラフに示せ。

次に金属中の電磁波の伝搬について考える。金属中には質量 m の自由電子が数密度 n_e で一様に存在しているとする。

[6] 電磁波の電場成分から力を受けて運動する金属中の自由電子が従う運動方程式を求めよ。

[7] この金属中での電磁波の k の実部と虚部を ω の関数として求め、その概形をグラフに示せ。

[8] 可視光領域での誘電体と金属の光学的性質の違いについて、設問 [5] と [7] の結果に基づいて述べよ。ただし、多くの物質に対して可視光の角周波数は低周波数極限にあると考えてよい。

第4問

半導体に対し空間的に一様な z 方向の静磁場を印加した場合を考える。このとき、電子の運動は次のような半古典方程式

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \epsilon(\boldsymbol{k})}{\partial k_x}, \quad \frac{dy}{dt} = v_y = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \epsilon(\boldsymbol{k})}{\partial k_y}, \quad \frac{dz}{dt} = v_z = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \epsilon(\boldsymbol{k})}{\partial k_z} \tag{1}$$

$$\hbar \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = -e\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{2}$$

で与えられるとする。ここで、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ および $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ は時刻 t における電子の位置、群速度、および波数ベクトルであり、$\epsilon(\boldsymbol{k})$ はエネルギー分散関係を表す。$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ は磁束密度 $(B > 0)$、e は電気素量 $(e > 0)$、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものである。電子のスピン自由度および磁場による軌道の量子化は考えないものとする。

[1] 半導体の伝導帯における電子の磁場中の運動について考える。この電子の運動は、式 (1), (2) において

$$\epsilon(\boldsymbol{k}) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_1} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_2} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_3} \tag{3}$$

を用いることにより記述できるものとする。非等価な有効質量 m_1, m_2, m_3 はバンドの異方性を反映したものであり、以下では $m_3 > m_2 > m_1 > 0$ とする。$t = 0$ における電子の位置と波数ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, 0)$ と $\boldsymbol{k}_0 = (k_{0x}, 0, k_{0z})$ とし、以下の設問に答えよ。ただし、$k_{0x} > 0$, $k_{0z} > 0$ とする。

[1.1] 式 (3) で与えられるバンドについて、単位体積当たりの状態密度 $\rho(\epsilon)$ をエネルギー ϵ の関数として求め、図示せよ。

[1.2] 式 (1)〜(3) から得られる k_x の解を $k_x = k_{0x}\cos(\omega_c t)$ と表したとき、ω_c を求めよ。また、このときの k_y と k_z の解を求めよ。

[1.3] 電子の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ が描く軌跡を k_x-k_y 平面に射影して図示せよ。時間発展の方向についても矢印で示せ。

[1.4] 電子の位置 $\boldsymbol{r}$ はどのような軌跡を描くか説明せよ。また、その軌跡を x-y 平面に射影して図示し、時間発展の方向についても矢印で示せ。

[2] 図1のような線形なバンド構造を持つ2次元結晶内部の電子の運動について考える。この結晶は、xy 平面上に固定されているとする。このとき $\epsilon(\boldsymbol{k})$ はバンドの交差点を原点として、正の定数 γ を用いて

$$\epsilon(\boldsymbol{k}) = \pm\gamma\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{4}$$

と記述できるものとする。$t = 0$ における電子の位置と波数ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, 0)$ と $\boldsymbol{k}_0 = (k_0, 0, 0)$ とし、以下の設問に答えよ。ただし、$k_0 > 0$ とする。

[2.1] 式 (4) で与えられるバンドについて、単位面積当たりの状態密度 $\rho(\epsilon)$ を求め、図示せよ。

[2.2] 式 (1), (2), (4) から得られる k_x の解を $k_x = k_0\cos(\omega_c t)$ としたとき、ω_c を求めよ。

[2.3] 電子の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ と位置 $\boldsymbol{r}$ が描く軌跡について、それぞれ k_x-k_y 平面と x-y 平面に図示せよ。時間発展の方向についても矢印で示せ。$\epsilon(\boldsymbol{k}) > 0$ と $\epsilon(\boldsymbol{k}) < 0$ の双方の分散関係について答えること。

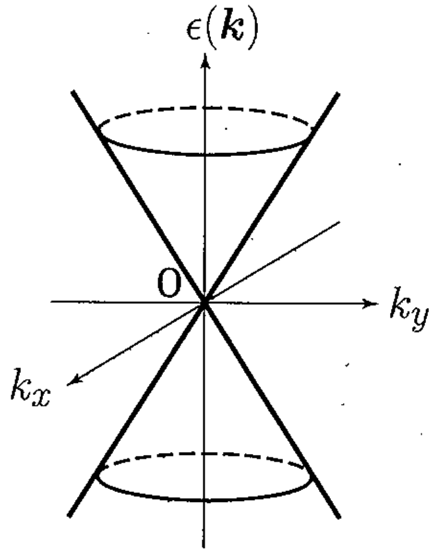

図 1