物理工学専攻
入学試験問題

専門科目

（５問出題，３問解答）

平成１７年８月３０日（火）　１３：００〜１６：００

注意事項

１．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
２．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
３．出題された５問のうちから３問を選び解答すること。
４．答案用紙が３枚渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
５．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
６．草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
７．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
８．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第I問

1次元運動をする内部自由度のない、質量 m の粒子を考える。原点にデルタ関数で表されるポテンシャル $V(x) = V_0\,\delta(x)$ が存在するとき、以下の3つの文章の正誤を判定せよ。ただし、対応するシュレディンガー方程式を解くことで、それぞれの文章で問題になっている物理量を求め、その判定理由を示せ。

[1] ポテンシャルが引力 $(V_0 < 0)$ のとき、束縛状態の数は $|V_0|$ が増大するにつれて増大する。

[2] 無限遠から原点に入射した粒子の (原点における) 反射率は、V_0 の符号によらず、大きさ $|V_0|$ だけで決まる。

[3] ポテンシャルが引力 $(V_0 < 0)$ のとき、束縛状態の運動量の自乗平均は $|V_0|$ に比例する。

第 II 問

物質内の電磁場に対するマクスウェル方程式は、電場 $\boldsymbol{E}$、電束密度 $\boldsymbol{D}$、磁場 $\boldsymbol{H}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}$、分極 $\boldsymbol{P}$、電流密度 $\boldsymbol{J}$、真電荷密度 ρ とすると、$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$、$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$、$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho$、$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$、$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ である。ただし、ε_0 は真空の誘電率、μ は物質の透磁率である。

[1] 電束密度が $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ で与えられる物質中を角振動数 ω、波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ で伝播する平面電磁波を考える。ε は物質の誘電率であり、ここではスカラー量であるとする。平面電磁波が進む方向を z 軸ととると、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ の成分は、x と y に無関係で z と t だけの関数となる。物質中に電流も真電荷もない場合、電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ の x と y 方向の成分 E_x、E_y と H_x、H_y を求めよ。また、平面電磁波が z 方向に減衰するための条件を述べよ。

[2] z 方向に一定の磁束密度 $\boldsymbol{B}_\mathrm{c}$ が印加されている導体中で、角振動数 ω、波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ で z 方向に伝播する平面電磁波を考える。このとき、導体中に存在する自由電子 (電荷 $-e$、質量 m、密度 n) は、磁束密度 $\boldsymbol{B}_\mathrm{c}$ と角振動数 ω で振動する電場 $\boldsymbol{E}$ により力を受けて運動する。この自由電子の運動方程式 ($m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -e\boldsymbol{E} - e\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{B}_\mathrm{c}$) を解いて、この自由電子の運動による分極 $\boldsymbol{P} = -en\boldsymbol{r}$ を計算すると、電束密度 $\boldsymbol{D}$ の x、y 成分は $D_x = \varepsilon_1 E_x + i\varepsilon_2 E_y$、$D_y = -i\varepsilon_2 E_x + \varepsilon_1 E_y$ となる。ε_1 と ε_2 を求めよ。ただし $\boldsymbol{r}$ は自由電子の位置ベクトルである。

[3] 上記の導体内部における電磁波について考える。

[3.1] [2] に示す導体内部において電場に対するマクスウェル方程式を解くと、与えられた ω に対して 2 種類の波数 k $(=|\boldsymbol{k}|)$ が存在する。この 2 つの波数 k の値を求めよ。

[3.2] [3.1] で求めた 2 つの波数 k に対応する電場を求め、これらがそれぞれ左右円偏光に対応することを説明せよ。

第 III 問

相互作用するスピン量子数 1/2 のスピン $\boldsymbol{s}_1$、$\boldsymbol{s}_2$ の対を考える (対応するスピン角運動量はそれぞれ $\hbar\boldsymbol{s}_1$、$\hbar\boldsymbol{s}_2$ で与えられる)。以後、このスピン対を 2 量体と呼ぶ。単位体積中に N 個の 2 量体が置かれており、z 軸方向の一様磁場 H_z がかかっているとして、以下の問に答えよ。ただし、スピン $\boldsymbol{s}$ の持つ磁気モーメントは $\boldsymbol{m} = -2\mu_{\mathrm{B}}\boldsymbol{s}$ とする。ここで、μ_{B} はボーア磁子であり、ボルツマン定数を k_{B} とする。

[1] 1 つの 2 量体のハミルトニアンが以下のように与えられるとする。

$$\mathcal{H} = J\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2 + 2\mu_{\mathrm{B}}H_z(s_1^z + s_2^z)$$

スピン間の交換相互作用エネルギー J は反強磁性的 $(J > 0)$ であるとする。1 つのスピンの s^z の固有関数を $|s^z\rangle = \left|\frac{1}{2}\right\rangle$ または $\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$ と書くと、このハミルトニアンの固有関数はそれぞれのスピンの s^z 固有関数の積 $(|s_1^z\rangle|s_2^z\rangle = |s_1^z, s_2^z\rangle)$ を用いて、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle - \left|-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle\right) \\
\phi_1 &= \left|-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle \\
\phi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle + \left|-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle\right) \\
\phi_3 &= \left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2 = s_1^z s_2^z + \frac{1}{2}(s_1^+ s_2^- + s_1^- s_2^+)$ に注意して、これらの状態に対応する固有エネルギーを求めよ。ただし、s^+、s^- はスピン昇降演算子である。

[2] N 個の 2 量体が温度 T の熱浴と接しているとする。2 量体間の相互作用は無視できるとして、この系の自由エネルギー F と磁化 M を、温度 T と磁場 H_z の関数として求めよ。

[3] 十分高温 $(k_{\mathrm{B}}T \gg J)$ で帯磁率 $\chi = \partial M/\partial H_z|_{H_z=0}$ がキュリー則 $(\chi = C/T$、C: キュリー定数$)$ に従う事を示せ。

[4] 十分低温 $(k_{\mathrm{B}}T \ll J)$ でのこの系の磁化 M の磁場 H_z 依存性の概略を図示し、その特徴を説明せよ。

第 IV 問

絶対零度の金属中の電子を、質量 m、電荷 $-e$ $(e>0)$、スピン量子数 1/2 を持った互いに相互作用しない自由フェルミ粒子と考える。原子核の正電荷は空間的に一様に分布しており、系全体として電気的中性の条件が満たされているものと近似する。

[1] まず電子密度が一様であり n_0 であるとする。

[1.1] 全系が一辺 L の立方体に入っているとして周期的境界条件を課し、エネルギー E の電子の単位体積あたりの状態密度 $D(E)$ を求めよ。

[1.2] フェルミエネルギー E_{F}^0 は $E_{\mathrm{F}}^0=\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n_0)^{2/3}$ と表せることを示せ。

[2] つぎに金属中の原点に点電荷 $q>0$ をおく。その結果、電子密度分布が一様でなくなり、場所 $\boldsymbol{r}$ における電子密度が $n(\boldsymbol{r})$ となったとする。このとき位置 $\boldsymbol{r}$ において [1.2] で与えられるような局所的なフェルミエネルギー $E_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{r})$ を考えることができるものとして、以下の問に答えよ。

[2.1] 点電荷の周りで $E_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{r})$ は増加したか、減少したか、理由をつけて述べよ。

[2.2] 点電荷を追加したことによる電子が受けるポテンシャルエネルギー変化を $-e\phi(\boldsymbol{r})$ として、電荷密度変化 $\delta n(\boldsymbol{r})=n(\boldsymbol{r})-n_0$ が近似的に $\delta n(\boldsymbol{r})=D_{\mathrm{F}}e\phi(\boldsymbol{r})$ となることを説明せよ。ただし、$D_{\mathrm{F}}=D(E_{\mathrm{F}}^0)$ であり $|e\phi(\boldsymbol{r})|\ll E_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{r})$ とする。

[2.3] $\phi(\boldsymbol{r})$ の満たす方程式が次のような形になることを導き α を求めよ。ただし、ϵ_0 は真空の誘電率とする。

$$(\Delta-\alpha^2)\phi=-\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\boldsymbol{r})$$

[2.4] $\delta n(\boldsymbol{r})=A\dfrac{e^{-\alpha r}}{r}$ であることを示し、A を求めよ。

[2.5] $\delta\rho(\boldsymbol{r})=-e\delta n(\boldsymbol{r})$ として $\int d^3r\,\delta\rho(\boldsymbol{r})$ を計算し、その物理的意味を説明せよ。

第V問

図に示すような実験装置を用いて液体ヘリウムで試料を冷却し、低温での電気抵抗測定を行うときの液体ヘリウムの保持時間を求めたい。以下の問に答えよ。なお、必要ならば以下の値を用い、解答は、誤差30% 以内で求めればよい。

室温	$\simeq 300$ K
液体窒素の温度	$\simeq 80$ K
液体ヘリウムの温度	$\simeq 4$ K

なお、実験装置の諸元は以下の通りである。

(a) A は断熱容器であり、図のように液体窒素でたえず満たされている。

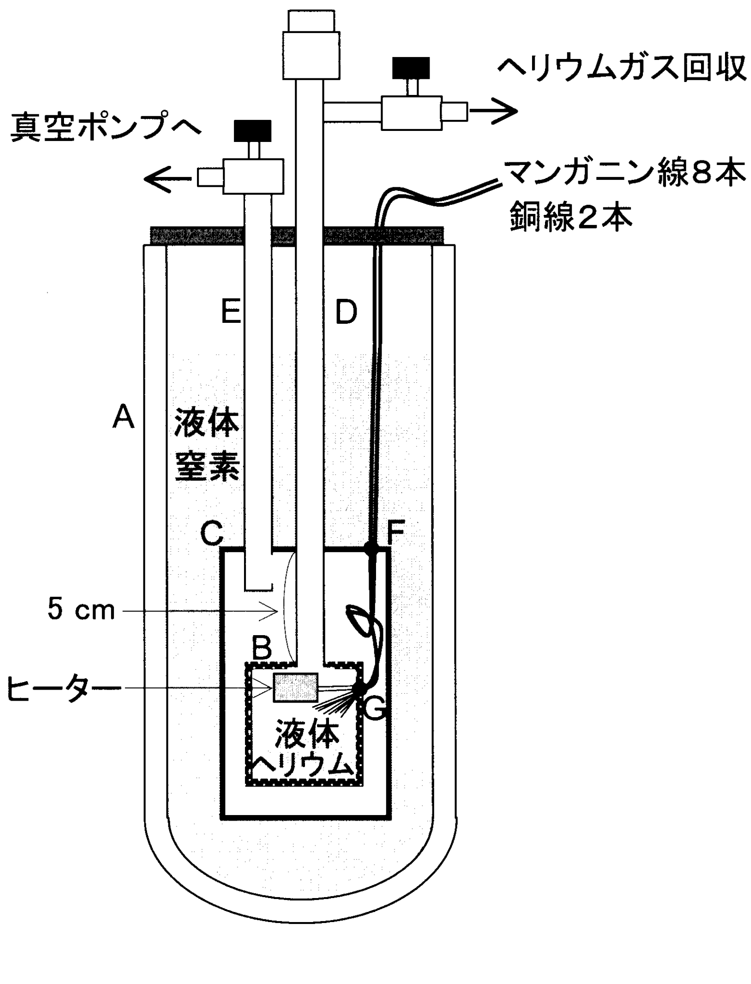
(b) B は銅製の液体ヘリウム容器である。

(c) C は真鍮製の真空容器で十分よく真空に保たれており、液体窒素に浸されている。

(d) B と C には、それぞれ液体ヘリウム注入用と真空排気用のステンレス製のパイプ D、E（直径 2 cm、肉厚 0.5 mm）が接合してある。

(e) パイプ D は、その内面がよく磨かれており、B と C の間の長さは 5 cm である。

(f) 直径 0.1 mm で薄い絶縁被覆を持ったマンガニン線 8 本（試料と温度計の抵抗測定用）と銅線 2 本（温度調節のためのヒーター用）が、気密を保ったまま F 点から容器 C、G 点から容器 B 内に導入されている。なお、F-G 間の電線の長さは 10 cm で、ヒーターの抵抗は 50 Ω とする。



[1] 容器Cを真空に保つ理由を述べよ。

[2] マンガニン線2対（4本）にそれぞれ0.1 mAを流し、試料と温度計の電気抵抗を測定した。このとき、温度調節のために銅線1対（2本）を通してヒーターに30 mAを流した。ヒーター以外の電線のジュール熱による液体ヘリウムへの単位時間あたりの全熱流入 $\dot{Q}_{\mathrm{J}}$ を計算せよ。なお、電線で発生したジュール熱の半分が液体ヘリウムに流入するとする。また、各電線の抵抗率は80 K以下で、銅線（0.2 $\mu\Omega$cm）、マンガニン線（40 $\mu\Omega$cm）とし、G点より内側での電線は十分短く発熱は無視できるとする。

[3] 金属を伝わる熱による液体ヘリウムへの単位時間あたりの全熱流入 $\dot{Q}_{\mathrm{c}}$ を計算せよ。なお、各材料の4 K〜80 Kにおける平均の熱伝導率は、以下の通りとする。

銅	80 W/m·K
真鍮	26 W/m·K
ステンレス	4.5 W/m·K
マンガニン	7.3 W/m·K

[4] 容器Bには2種類の輻射熱が侵入してくる。輻射による液体ヘリウムへの単位時間あたりの全熱流入を計算せよ。一般に、輻射による単位時間あたりの熱流入 $\dot{Q}_{\mathrm{r}}$ は、低温部・高温部の温度をそれぞれ T_1、T_2、有効表面積を S とすると以下の式で与えられる。

$$\dot{Q}_{\mathrm{r}} = \epsilon\sigma S(T_2^4 - T_1^4)$$

ここで、ϵ は低温部と高温部の表面状態に依存する平均の放射率であり、ここでは断りの無い限り $\epsilon = 0.1$ とする。また、σ はシュテファン-ボルツマン定数であり、$\sigma = 5.7 \times 10^{-8}$ W/m^2·K^4 である。なお、容器Bと容器Cの有効表面積はそれぞれ100 cm^2 と見なす。

[5] 容器Bに入った0.1 l の液体ヘリウムが全て無くなるまでの時間を計算せよ。ただし、液体ヘリウムの気化熱を2.6 J/ml とする。

[6] [2]から[4]までの計算結果をもとに、液体ヘリウムをより長持ちさせるのに有効な実験装置の改造のアイデアを2つ示せ。

[7] [2]では銅線とマンガニン線が使い分けられている。この理由を述べよ。