物理工学専攻
入学試験問題

専門科目

（5問出題，3問解答）

平成16年8月31日（火）　13：00～16：00

注意事項

1．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3．出題された5問のうちから3問を選び解答すること。
4．答案用紙が3枚渡されるから，1題ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6．草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

xy 平面上で原点を中心とする半径 r の円周を考える。この円周上を運動する電子の量子力学的運動について以下の設問に答えよ。ただし電子の質量を m、電荷を $-e$ $(e>0)$、またプランク定数 h を 2π で割ったものを $\hbar$ とする。

[1] x 軸からの角度を θ とすると、この系のハミルトニアンは

$$H = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}$$

で与えられる。周期性を考慮して、エネルギー固有関数とエネルギー固有値を全て求めよ。また各エネルギー固有値に対する縮重度はいくつになるか。ただしスピンの自由度は考えない。

[2] [1] の系において、x 軸方向に一様な電場 E が加わった場合のエネルギー固有値の変化を 1 次摂動の範囲で求めよ。

[3] [1] の系において、$2V\cos 2\theta$ で表されるポテンシャルが加わった場合を考える。エネルギー固有値の変化を 1 次摂動の範囲で求め、対応する波動関数を示せ。結果の物理的意味を論ぜよ。また 1 次摂動の範囲でエネルギー固有値が変化した状態につき、軌道角運動量ベクトル $\vec{L}$ の z 成分 L_z と L_z^2 の期待値を求めよ。

[4] [1] の系において今度はスピンの自由度を考え、ハミルトニアンにスピン・軌道相互作用項 $\lambda s_z L_z$ が加わったときのエネルギー固有値を求めよ。ただし λ は相互作用の強さを表す定数、s_z は電子のスピン角運動量の z 成分とする。

第2問

1 辺の長さ L、体積 V $(= L^3)$ の立方体中の、相互作用のない量子力学的粒子 (質量 m) からなる絶対温度 T の気体を考える。以下の設問に答えよ。ただしプランク定数 h を 2π で割ったものを $\hbar$、ボルツマン定数を k_B とする。なおスピンの自由度は考えないとする。

[1] 周期的境界条件を用いて、自由粒子 1 個のシュレディンガー方程式を解き、エネルギー固有値を求めよ。

[2] $n_Q \equiv (mk_\mathrm{B}T/2\pi\hbar^2)^{3/2}$ と定義する。1 粒子のカノニカル分配関数 Z_1 を求め、n_Q を用いて表せ。また 1 粒子の平均エネルギー u を求めよ。ただし L は十分に大きいとし、和を積分で置きかえてよい。

[3] $n_Q^{-1/3}$ は長さの次元を持っており、熱的ド・ブロイ波長と呼ばれる。その物理的意味を説明せよ。

[4] N 粒子系の粒子数密度を $n \equiv N/V$ とする。$n/n_Q \ll 1$ のとき、この気体に対して量子統計の近似としてボルツマン統計を用いることが正当化される。その理由を説明せよ。

[5] [4] の近似のもとで N 粒子系の分配関数 Z_N は、単に Z_1^N ではなく、$Z_N \equiv Z_1^N/N!$ としなくてはならない。$N!$ で割るのはなぜか物理的に説明せよ。

[6] [5] の Z_N からヘルムホルツの自由エネルギー F を求め、さらに状態方程式、およびエントロピー S の表式を求めよ。ただし $N \gg 1$ とし、スターリング近似 $\log N! \approx N\log N - N$ を使ってよい。

第3問

以下の設問について物理学の立場から答えよ。数式、図などを使い、具体的に答えること。

[1] 大きさ 1mm 程度のガラス破片の屈折率を測定する方法について述べよ。

[2] 磁場の強さを測定する方法を説明し、その原理について述べよ。

[3] 光の反射率が 1 に近くなる場合を二つ挙げ、その理由を述べよ。

第4問

質量 m の質点に対するニュートンの運動方程式 (1 次元運動)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{m}p(t) & (1)\\
\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} &= f(x(t)) & (2)
\end{aligned}
$$

を差分方程式で近似し、数値的に解きたい。ここで $x(t)$、$p(t)$ は時刻 t での質点の位置と運動量、$f(x)$ は位置 x で質点に作用する力とする。Δt は十分に小さい正の定数として以下の設問に答えよ。ただし $f(x)$ および運動方程式 (1)、(2) の解 $x(t)$、$p(t)$ は解析的であるとする。

[1] 与えられた x、p から 1 ステップ先の x^{E}、p^{E} を

$$
\begin{aligned}
x^{\mathrm{E}} &= x + \frac{p}{m}\Delta t\\
p^{\mathrm{E}} &= p + f(x)\Delta t
\end{aligned}
$$

として求める方法をオイラー差分法と呼ぶ。与えられた x_0、p_0 からオイラー差分法により求めた x_0^{E}、p_0^{E} と、運動方程式 (1)、(2) の解で $x(t) = x_0$、$p(t) = p_0$ を満たす軌道の $x(t+\Delta t)$、$p(t+\Delta t)$ とを考える。$|x_0^{\mathrm{E}} - x(t+\Delta t)|$、および $|p_0^{\mathrm{E}} - p(t+\Delta t)|$ は $(\Delta t)^2$ 程度であることを示せ。

[2] [1] では同時刻での x、p から次の値を決めたが、異なる時刻での x、p から決める方法も知られている。x、p から 1 ステップ先の x^{LF} を

$$x^{\mathrm{LF}} = x + \frac{p}{m}\Delta t$$

で求め、x^{LF}、p から次の p^{LF} を

$$p^{\mathrm{LF}} = p + f(x^{\mathrm{LF}})\Delta t$$

として求める方法を蛙跳び差分法と呼ぶ。与えられた x_0、p_0 から蛙跳び差分法により求めた x_0^{LF}、p_0^{LF} と、運動方程式 (1)、(2) の解で $x(t) = x_0$、$p(t+\Delta t/2) = p_0$ を満たす軌道の $x(t+\Delta t)$、$p(t+3\Delta t/2)$ とを考える。$|x_0^{\mathrm{LF}} - x(t+\Delta t)|$、および $|p_0^{\mathrm{LF}} - p(t+3\Delta t/2)|$ は $(\Delta t)^3$ 程度であることを示せ。

ヒント: x については $t+\Delta t/2$、p については $t+\Delta t$ を中心としたテイラー展開を考えよ。

第5問

図1に示すように、水より屈折率の高い球形の微粒子を、水中に希薄に分散させた試料に、レーザー光を対物レンズを通して強く集光させる。このとき焦点付近に微粒子が存在すると、光強度の高い方向に引力を受ける。微粒子の運動を図2に示す顕微鏡装置を用いて観察する。容器の内壁からの影響、重力は考えなくともよい。実験は27°Cで行うものとし、以下の設問に答えよ。ただしボルツマン定数 $k_\mathrm{B} = 1.4 \times 10^{-23}\mathrm{J/K}$、水の粘性率 $\eta = 1.0 \times 10^{-3}\mathrm{N \cdot s/m^2}$ とする。

[1] 孤立した微粒子は水中で不規則な運動(これをブラウン運動と呼ぶ)を行う。その原因を微視的に説明せよ。

[2] レーザー光を照射していない状態で、微粒子の $t = 0$ の位置から測ったブラウン運動による変位の分散 $\sigma^2(t) = \langle|\vec{r}(t) - \vec{r}(0)|^2\rangle$ (ただし $\vec{r}(t)$ は時刻 t における粒子の位置ベクトル) は以下の式で与えられる。

$$\sigma^2(t) = \frac{k_\mathrm{B}T}{\pi\eta a}t$$

上述の顕微鏡装置を使ってこの式を検証するための実験条件を数値的に与えよ。なお装置の性能としては現実的な値を想定せよ。ただし a は微粒子の半径、T は絶対温度とする。

[3] 半径 $0.1\mu\mathrm{m}$ の微粒子一つがブラウン運動する様子をCCDカメラにより観察した。ある瞬間の画像とその濃度分布を図3に示す。このようにして得られた画像をもとに、微粒子の重心の面内での位置を求めたい。誤差が分布幅よりも十分小さくなるように重心位置を求めるための方法を述べよ。また誤差を定量的に見積るための方法を述べよ。

[4] 次にレーザー光を照射し焦点付近にポテンシャルを発生させた。微粒子の位置情報を使って、この微粒子の受ける2次元的なポテンシャルの形状を求めるためには、どのような実験および解析を行えばよいか、記述せよ。

[5] 水平面内に x 軸をとり、レーザー光によるポテンシャルが以下の式で与えられるとする。

$$U(x) = \begin{cases} C(x^2 - x_0^2) & (-x_0 < x < x_0) \\ 0 & (x \leq -x_0,\, x \geq x_0) \end{cases}$$

ただしレーザー光の中心を原点とし、$C = 4.2 \times 10^{-8}\mathrm{J/m^2}$、$x_0 = 1.0\mu\mathrm{m}$ とする。レーザー光を固定し、試料の載ったステージを x 方向に一定速度 v で動かすことによって、このポテンシャルに束縛された半径 $a = 0.1\mu\mathrm{m}$ の微粒子に粘性抵抗を加えた。速度 v と微粒子の平均の位置 $\bar{x}$ との関係をグラフに描け。なお粘性抵抗の大きさは以下の式によって与えられるものとする。

$$f = 6\pi\eta av$$

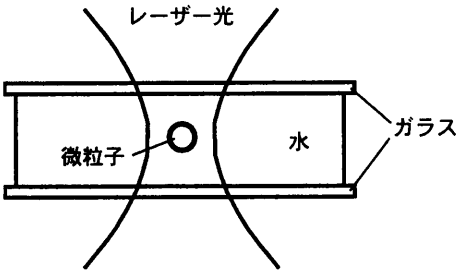
レーザー光
ガラス
微粒子
水

図 1

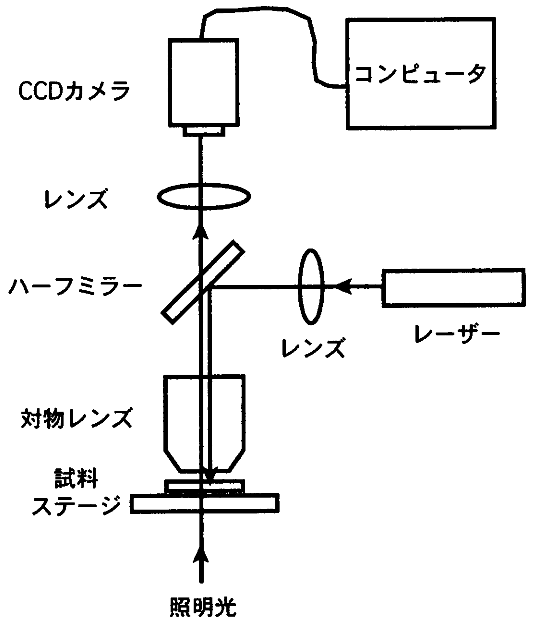
CCDカメラ
コンピュータ
レンズ
ハーフミラー
レンズ
レーザー
対物レンズ
試料
ステージ
照明光

図 2

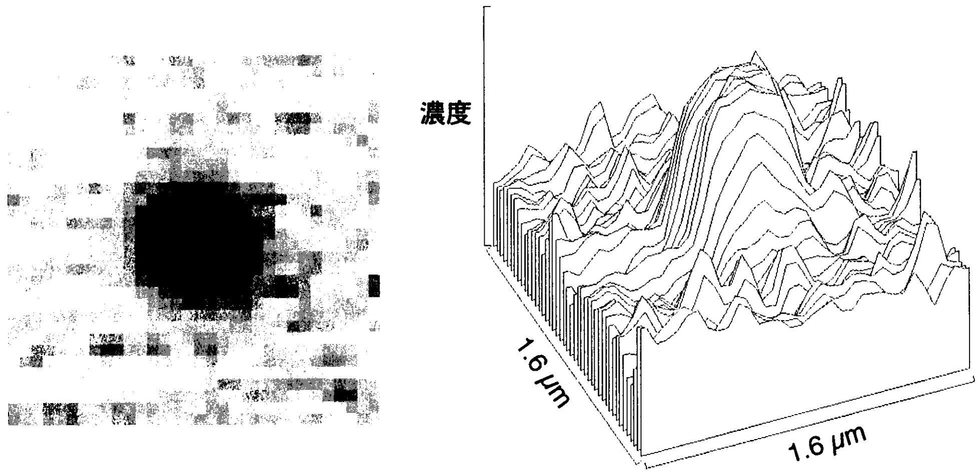
濃度
1.6 μm
1.6 μm

図 3