物 理 工 学 専 攻
入 学 試 験 問 題

物　理　学

（４問出題，４問解答）

２０２５年8月２６日（火）　９：００～１３：００

注意事項

１．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
２．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
３．出題された４問とも解答すること。
４．答案用紙が４枚渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
５．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
６．下書用紙は本冊子から切り離さないこと。
７．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
８．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

Instructions in English are on the back cover.

第 1 問

各種の剛体の運動に関する以下の問いに答えよ。

[1] 図 1(a)（正面図)、図 1(b)（側面図）のような、均一な密度の質量 M の剛体を考える。剛体は中心軸 C を共有する 3 枚の円盤からなり、外側の 2 枚の円盤の半径を r_1、厚さを d_1 とする。また、内側の 1 枚の円盤の半径を r_2、その厚さは無視できるものとする。上端が固定された糸が内側の円盤に巻き付けられており、剛体が糸に対して滑ることなく回転しながら重力加速度 g のもとで重力に従って鉛直方向に落下する。このとき中心軸 C の方向は一定とする。以下の問いに答えよ。ただし、糸の質量、糸の太さは無視できるものとする。

[1.1] 剛体の中心軸 C に関する慣性モーメントを求めよ。ただし導出過程を示すこと。

[1.2] 糸の張力を T (> 0)、剛体の重心の鉛直下向きの加速度を a とする。剛体の並進運動、及び回転運動についての運動方程式をそれぞれ記せ。

[1.3] r_1, r_2, g を用いて剛体の重心の鉛直下向きの加速度 a を表せ。

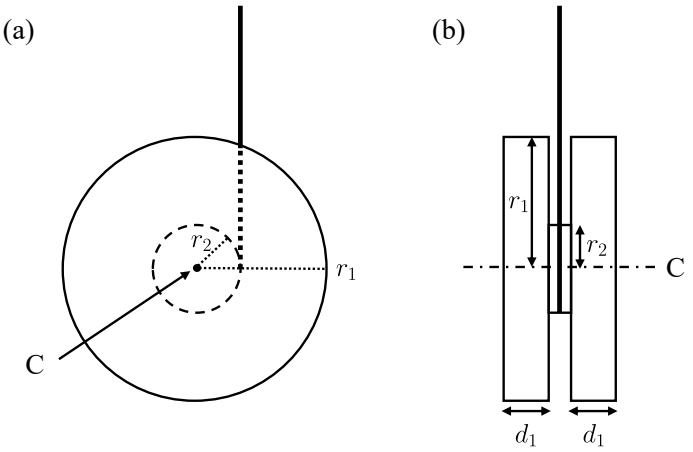

図 1

[2] 図 2 のような半径 R の厚さの無視できる一様な面質量密度 ρ の球殻を考える。この球殻は一様に電荷を帯び、その面電荷密度を σ とする。一様な磁場のもとで、この球殻を回転させると一般に歳差運動をする。

重力の影響は無視し、球殻の重心は動かないものとする。球殻の重心を原点として、磁場の方向を z 軸にとり、磁場の磁束密度を $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ とする (B は 0 でない定数)。また運動の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ として以下の問いに答えよ。なお電荷は球殻に固定されていると仮定する。また球殻上の電荷が回転により作り出す磁場は歳差運動に影響を与えないこととし、以下では考慮しない。

[2.1] 球殻上の位置 $\boldsymbol{r}$ における球殻の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\omega}$ 及びベクトルの外積を利用して表せ（成分表示をする必要はない)。

[2.2] 球殻上の位置 $\boldsymbol{r}$ における微小面積 $\mathrm{d}S$ を考える。$\mathrm{d}S$ に働くローレンツ力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{B}, \sigma, \mathrm{d}S$ とベクトルの内積を用いて表せ（成分表示をする必要はない)。ただし、任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対する公式 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ を用いてよい。

[2.3] 球殻上の位置 $\boldsymbol{r}$ の微小面積 $\mathrm{d}S$ に働く原点を中心としたトルク $\mathrm{d}\boldsymbol{N}$ を $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{B}, \sigma, \mathrm{d}S$ とベクトルの内積、外積を用いて表せ（成分表示をする必要はない）。

[2.4] 球殻が磁場から受ける原点を中心としたトルクの合計 $\boldsymbol{N}$ は、問 [2.3] で求めた $\mathrm{d}\boldsymbol{N}$ を球殻全体で積分することで得られる。$\boldsymbol{N}$ の各成分を $\omega_x, \omega_y, \omega_z, B, \sigma, R$ のうち必要なものを用いて表せ。ただし、下記の面積分の公式を用いてよい。

$$\int_{\Omega_R} \mathrm{d}S\ f(x,y,z) = \int_{\Omega_R} \mathrm{d}S\ f(y,z,x) = \int_{\Omega_R} \mathrm{d}S\ f(z,x,y) = \int_{\Omega_R} \mathrm{d}S\ f(x,y,-z) \quad (1)$$

ここで Ω_R は原点を中心とする半径 R の球面、$f(x,y,z)$ は Ω_R 上で面積分可能な任意の関数とする。

[2.5] x 軸、y 軸、z 軸の各軸に関する球殻の慣性モーメントをそれぞれ求めよ。必要に応じて問 [2.4] で与えられた公式を用いてよい。

[2.6] 球殻の回転運動についての運動方程式を解くことで、時刻 t における $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ を求めよ。ただし時刻 $t = 0$ の初期条件として、回転の角速度の大きさを ω_0 (> 0)、回転軸と z 軸のなす角度を θ $(0 < \theta < \pi/2)$ とし、$\omega_x > 0, \omega_y = 0, \omega_z > 0$ と仮定する。さらに $\sigma < 0$, $B > 0$ の場合、$\boldsymbol{\omega}$ の歳差運動の向きは z 軸の正の側から見て時計回り、反時計回りのどちらであるか答えよ。

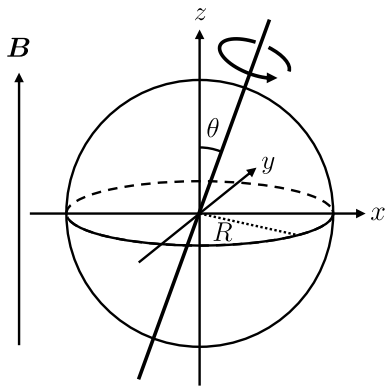

図 2

第2問

量子力学的な粒子の x 軸上における一次元運動を考える。粒子はポテンシャルに束縛されており、系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{m\omega^2}{2}x^2 + V_0 & (x < 0) \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{m\omega^2}{2}x^2 & (x \geq 0) \end{cases} \tag{1}$$

で与えられる。ここで、m は粒子の質量、ω (> 0) は定数、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものであり、V_0 は x に依存しないものとする。

$V_0 = 0$ の場合、このハミルトニアンは角振動数 ω の調和振動子となり、その基底状態および第 1 励起状態の規格化された波動関数は、ある定数 α (> 0) を用いて、それぞれ

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right), \tag{2}$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2\alpha}\, x \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right) \tag{3}$$

となる。この場合、n 番目（n は非負整数）の規格化されたエネルギー固有状態 $\psi_n(x)$ は n が偶数のときは $\psi_n(0) \neq 0$ を満たす偶関数、n が奇数のときは奇関数となる。また、$\psi_n(x)$ のエネルギー固有値は $E_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$ で与えられる。

以下の問いに答えよ。

[1] まず、$V_0 = 0$ における基底状態 $\psi_0(x)$ について考える。

[1.1] α を m，ω，$\hbar$ を用いて表せ。

[1.2] V_0 が小さな正の値をとるとき、$V_0 = 0$ の場合と比較した基底状態のエネルギーの変化量を V_0 の 1 次まで求めよ。

[2] 次に、$V_0 \to \infty$ の極限を考える。この条件における k 番目（k は非負整数）の規格化されたエネルギー固有状態 $\phi_k(x)$ は、

$$\phi_k(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ N\psi_{2k+1}(x) & (x \geq 0) \end{cases} \tag{4}$$

で与えられる。N (> 0) は規格化定数である。

[2.1] 固有状態 $\phi_k(x)$ が式 (4) のように与えられる理由を説明せよ。

[2.2] 規格化定数 N を求めよ。また、$\phi_k(x)$ のエネルギー固有値 $\mathcal{E}_k$ を $\hbar$, ω を用いて表せ。

[3] 時刻 $t < 0$ において、$V_0 \to \infty$ のハミルトニアンの下で粒子が基底状態 $\phi_0(x)$ にいたとする。時刻 $t = 0$ に瞬間的に V_0 を 0 に変化させ、その後 $V_0 = 0$ に保った場合の粒子の運動を考える。

[3.1] 時刻 $t = 0$ における規格化された波動関数は、$c_0 > 0$ を満たすような複素係数 c_j（j は非負整数）を用いて

$$\Psi(x, t = 0) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi_j(x) \tag{5}$$

と表せる。c_0 を求めよ。

[3.2] 時刻 $t > 0$ におけるエネルギーの期待値 $E(t)$ を $\hbar$, ω を用いて表せ。

[3.3] 時刻 $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ における規格化された波動関数 $\Psi\left(x, t = \dfrac{2\pi}{\omega}\right)$ を α を用いて表せ。導出過程も示すこと。

[3.4] 時刻 $t = \dfrac{\pi}{\omega}$ における規格化された波動関数 $\Psi\left(x, t = \dfrac{\pi}{\omega}\right)$ を α を用いて表せ。導出過程も示すこと。

第3問

ゴム弾性の模型として、N 個の分子が一列に連なって構成された分子列を考える。各分子の長さは a である。この分子列の温度を T とする。ボルツマン定数を k_{B} として、以下の問いに答えよ。

[1] はじめに、1次元的な分子列を考える。分子列の端点は固定されており、その間の長さを L とする。図1のように各分子を矢印で表し、左の端点から右の端点へと連なった矢印の列で分子列の微視的状態を表現するものとする。このとき、この分子列の微視的状態は、各分子を表す矢印が右向きか左向きかによって指定される。分子列の内部エネルギー U はゼロとする。以下では、N および L/a はともに偶数とする。

[1.1] 右向きの矢印で表される分子の数を N_+、左向きの矢印で表される分子の数を N_- とする。N_+, N_- を N, L, a を用いて表せ。

[1.2] 分子列の微視的状態の総数 W を N, L, a を用いて表せ。

以下では、$L/(Na)$ を一定として N を大きくする熱力学極限を考え、L を状態量とみなす。また、この分子列のエントロピーを S とする。

[1.3] エントロピー S を N, L, a, k_{B} を用いて表せ。ただし、スターリングの公式 $\log n! \simeq n \log n - n$ $(n \gg 1)$ を用いよ。

[1.4] 分子列の張力 X は自由エネルギー $F = U - TS$ を用いて $X = \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T$ と与えられる。張力 X を求めよ。さらに、$L/(Na) \ll 1$ のときの張力 X を L について1次までの表式で求めよ。

[1.5] 張力 X を $L \in (0, Na)$ の関数として概形を図示せよ。

次に、このゴムを断熱的に引き伸ばすことを考える。断熱伸長の際の温度変化率 $\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S$ を求めたい。以下では、各分子には内部自由度があるとし、定数 r を用いて温度 T において分子列は内部エネルギー $U = Nrk_{\mathrm{B}}T$ をもつものとする。各分子の内部自由度に由来する自由エネルギーへの寄与は L 依存性をもたないものとする。このとき、張力 X の T および L 依存性は問 [1.4] で求めたものと変わらない。

[1.6] L 一定の場合の分子列の熱容量を C_L とする。$\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S$ を $T, C_L, \left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_L$ を用いて表せ。ただし、マクスウェルの関係式 $\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = -\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_L$ を用いてもよい。

[1.7] $L/(Na) \ll 1$ として、$\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S$ を L について1次までの表式で求めよ。

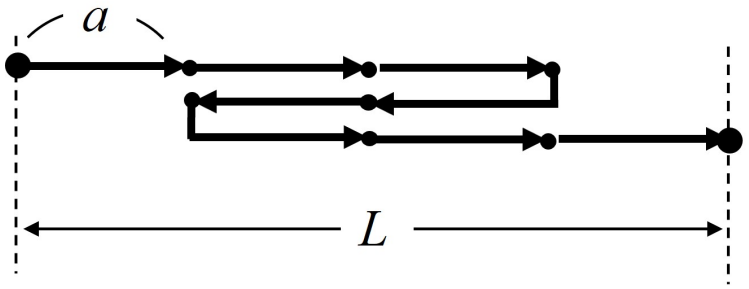

図1

[2] 次に、図 2 のように 3 次元的な分子列を考える。分子列の片方の端点 A は原点に固定され、もう片方の端点 B にはその位置によらず z 軸正の向きに一定の外力 X (> 0) が働いている。図 2 のように各分子を矢印で表し、端点 A から端点 B へと連なった矢印の列で分子列の微視的状態を表現するものとする。i 番目の分子を表す矢印の向きが極座標表示で (θ_i, ϕ_i) で与えられるものとすると、端点 B の z 座標は $a\sum_i \cos\theta_i$ で与えられる。分子の内部エネルギーや運動エネルギーは考えないものとする。

[2.1] 分配関数 Z を求めよ。ただし、温度無限大の極限で $Z \to (4\pi)^N$ とする。

[2.2] N を大きくする熱力学極限を考え、端点 B の z 座標を状態量とみなし L とする。温度 T において、X と L の関係を考える。$Xa/(k_{\mathrm{B}}T) \ll 1$ のときに、外力 X を L の 1 次までの表式で求めよ。

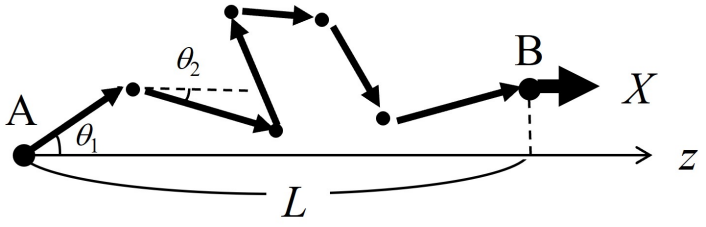

図 2

第 4 問

一軸異方性を持つ結晶における角振動数 ω の光の複屈折について考える。光の吸収は無視できるものとし、結晶は真空と同じ透磁率 μ_0 を持つとする。i は虚数単位を表し、真空の誘電率を ϵ_0 と定義する。以下では、電子の変位や電場・磁場を複素数で表現し、それぞれの物理量はその実部に対応するものとする。また、結晶中の電束密度 $\boldsymbol{D}$ は、誘電率テンソル $\tilde{\epsilon}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ を用いて

$$\boldsymbol{D} = \tilde{\epsilon}\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \boldsymbol{E} \tag{1}$$

と書けるものとする。

[1] 結晶中の電子（質量 m, 電荷 $-e$）が、ポテンシャルに束縛されており、各電子の平衡位置からの変位を $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$ としたとき、ポテンシャルエネルギーは

$$V(\boldsymbol{u}) = m(\omega_\alpha^2 u_x^2 + \omega_\alpha^2 u_y^2 + \omega_\beta^2 u_z^2)/2 \tag{2}$$

で与えられるとする。ただし、$\omega_\alpha (\neq \omega)$ と $\omega_\beta (\neq \omega)$ は正の定数とする。いま、空間的に一様な振動電場 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp[-i\omega t]$（$\boldsymbol{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$ は実の定数ベクトル、t は時刻とする）が印加された場合を考える。

[1.1] 結晶中の 1 つの電子の変位 $\boldsymbol{u}$ に関する運動方程式を記せ。

[1.2] 結晶中の電束密度は $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ で与えられる。電気分極 $\boldsymbol{P}$ が、電子密度 ρ を用いて $\boldsymbol{P} = -\rho e \boldsymbol{u}$ と書けるとき、誘電率テンソル $\tilde{\epsilon}$ を $\epsilon_0, m, \rho, e, \omega, \omega_\alpha, \omega_\beta$ を用いて表せ。

[2] 結晶の平坦な境界面に向けて、真空から直線偏光の平面波を入射し、反射光と透過光が生じる場合を考える。図 1 のように直交座標系 xyz を定義し、境界面に垂直な方向を z 軸とする。以下では、結晶の誘電率テンソル $\tilde{\epsilon}$ は、対角成分 $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_\mathrm{n}$ と $\epsilon_{zz} = \epsilon_\mathrm{a}$ のみを有しており（$\epsilon_\mathrm{n} > \epsilon_\mathrm{a} > \epsilon_0$）、非対角成分は全てゼロであるとする。入射光は xz 平面に平行な波数ベクトル $\boldsymbol{k}_\mathrm{i}$ で特徴付けられており、z 軸と $\boldsymbol{k}_\mathrm{i}$ のなす角度を ϕ_i と定義する。位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$、時刻 t における入射光の電場成分と磁場成分は、それぞれ

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{i}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{i},0} \exp[i(\boldsymbol{k}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)] \tag{3}$$

$$\boldsymbol{H}_\mathrm{i}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{i},0} \exp[i(\boldsymbol{k}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)] \tag{4}$$

で与えられる。反射光は、波数ベクトル $\boldsymbol{k}_\mathrm{r}$ で特徴づけられる平面波である。入射光が S 偏光である（電場が y 成分のみを持つ）とき、透過光は波数ベクトル $\boldsymbol{k}_\mathrm{t1}$ で特徴づけられ、その電場成分と磁場成分は

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{t1}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{t1},0} \exp[i(\boldsymbol{k}_\mathrm{t1} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)] \tag{5}$$

$$\boldsymbol{H}_\mathrm{t1}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{t1},0} \exp[i(\boldsymbol{k}_\mathrm{t1} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)] \tag{6}$$

で与えられる。同様に、入射光が P 偏光である（電場が x,z 成分のみを持つ）とき、透過光は波数ベクトル $\boldsymbol{k}_\mathrm{t2}$ で特徴づけられ、その電場成分と磁場成分は

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{t2}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{t2},0} \exp[i(\boldsymbol{k}_\mathrm{t2} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)] \tag{7}$$

$$\boldsymbol{H}_\mathrm{t2}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{t2},0} \exp[i(\boldsymbol{k}_\mathrm{t2} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)] \tag{8}$$

で与えられる。$\boldsymbol{k}_\mathrm{r}$, $\boldsymbol{k}_\mathrm{t1}$, $\boldsymbol{k}_\mathrm{t2}$ は入射面である xz 平面に平行であり、z 軸と $\boldsymbol{k}_\mathrm{t1}$ および $\boldsymbol{k}_\mathrm{t2}$ のなす角度を、それぞれ ϕ_t1 および ϕ_t2 と定義する。なお、$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i},0}, \boldsymbol{E}_{\mathrm{t1},0}, \boldsymbol{E}_{\mathrm{t2},0}, \boldsymbol{H}_{\mathrm{i},0}, \boldsymbol{H}_{\mathrm{t1},0}, \boldsymbol{H}_{\mathrm{t2},0}$ は実の定数ベクトルとする。

[2.1] 境界面（$z = 0$）上のあらゆる場所において電場と磁場の接線成分が連続になることを利用して、$\sin\phi_{\mathrm{t}1}$ および $\sin\phi_{\mathrm{t}2}$ を、$\phi_{\mathrm{i}}, |\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}|, |\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}1}|, |\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}2}|$ の中から必要なものを用いて表せ。

[2.2] 結晶中の角振動数 ω の平面波の光に対して、波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の向きを指定する単位ベクトル $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ を用いて

$$\boldsymbol{D} = \frac{|\boldsymbol{k}|^2}{\mu_0\omega^2}(\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{e}) \tag{9}$$

の関係が成り立つことを示せ。なお、マクスウェル方程式より、$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu_0(\partial\boldsymbol{H}/\partial t)$ および $\nabla\times\boldsymbol{H} = (\partial\boldsymbol{D}/\partial t)$ を用いてよい。また、任意のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に対する公式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ を用いてよい。

[2.3] S 偏光に対して、式 (9) を解くことで、$|\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}1}|$ の値を $\epsilon_{\mathrm{n}}, \mu_0, \omega$ を用いて表せ。

[2.4] S 偏光の場合に、$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}1,0}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}1,0}$（結晶中の透過光の光線方向と平行なベクトル）が z 軸となす角度を、$\epsilon_{\mathrm{n}}, \epsilon_{\mathrm{a}}, \phi_{\mathrm{t}1}$ の中から必要なものを用いて表せ。

[2.5] P 偏光に対して、式 (9) を解くことで、$|\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}2}|$ の値を $\epsilon_{\mathrm{n}}, \epsilon_{\mathrm{a}}, \mu_0, \omega, \phi_{\mathrm{t}2}$ を用いて表せ。

[2.6] P 偏光の場合に、$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}2,0}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}2,0}$（結晶中の透過光の光線方向と平行なベクトル）が z 軸となす角度を $\theta_{\mathrm{t}2}$ と定義する。$\tan\theta_{\mathrm{t}2}$ の値を $\epsilon_{\mathrm{n}}, \epsilon_{\mathrm{a}}, \phi_{\mathrm{t}2}$ の中から必要なものを用いて表せ。

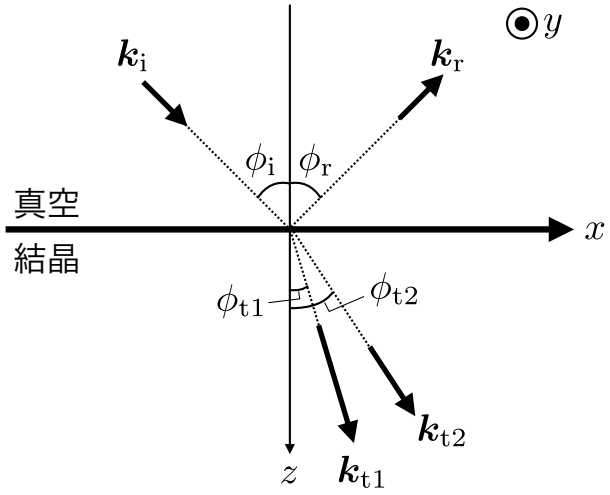

図 1

Problem 1

Answer the following questions regarding the motion of various rigid bodies.

[1] We consider the rigid body shown in Fig. 1(a) (front view) and Fig. 1(b) (side view) with mass M and uniform mass density. The rigid body consists of three disks which share a central axis C. The outer two disks have radius r_1 and thickness d_1. The inner disk has radius r_2 and we assume that its thickness is negligible. A string, with its upper end fixed, is wound around the inner disk. The mass and the thickness of the string are negligible. The rigid body is subject to the gravitational acceleration g and falls vertically downwards while rotating without slipping relative to the string. We assume that the central axis C keeps its direction. Answer the following questions.

[1.1] Find the moment of inertia of the rigid body about the central axis C. Also, show the derivation of this result.

[1.2] Let T (> 0) be the tension of the string and a be the vertically downward acceleration of the center of mass of the rigid body. Write the equations of motion for the translational motion and for the rotation of the rigid body.

[1.3] Express the vertically downward acceleration a of the center of mass of the rigid body in terms of r_1, r_2, and g.

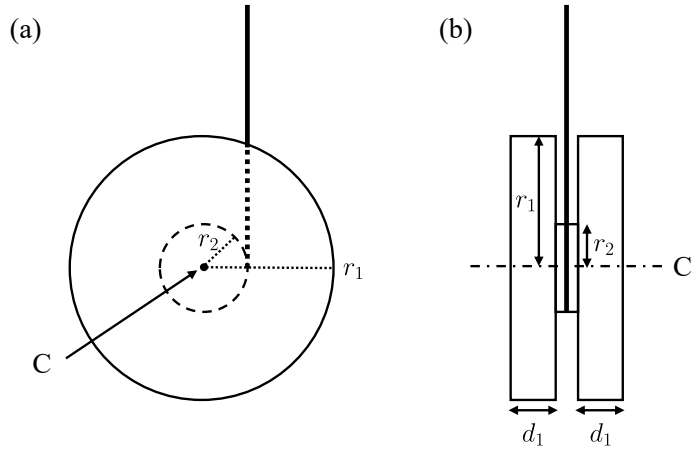

Figure 1

[2] We consider a spherical shell of radius R and of negligible thickness, as shown in Fig. 2. The surface mass density ρ is uniform. This spherical shell is electrically charged with a uniform surface charge density σ. When the sphere rotates in a uniform magnetic field, it does precession motion in general.

We neglect the effect of gravity and assume that the center of mass of the spherical shell does not move. With the center of mass of the spherical shell located at the origin, let the z-axis be the direction of the magnetic field and let the magnetic flux density of the magnetic field be $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$, where B is a non-zero constant. By assuming the angular velocity vector of the motion is $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, answer the following questions. Assume that the charge is fixed to the spherical shell, and that the magnetic field produced by the rotation of the

charge on the spherical shell does not affect the precession. Therefore we neglect any such magnetic field in the following.

[2.1] Express the velocity vector $\boldsymbol{v}$ of the spherical shell at position $\boldsymbol{r}$ on the spherical shell, using $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\omega}$ and the cross product of vectors (it is not necessary to express the vectors in terms of their components).

[2.2] We consider an infinitesimal surface $\mathrm{d}S$ at position $\boldsymbol{r}$ on the surface of the spherical shell. Express the Lorentz force $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ acting on $\mathrm{d}S$ using $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{B}, \sigma, \mathrm{d}S$ and the dot product of vectors (it is not necessary to express the vectors in terms of their components). Note that the following formula for arbitrary vectors $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, and $\boldsymbol{c}$ may be used, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$.

[2.3] Let $\mathrm{d}\boldsymbol{N}$ be a torque around the origin acting on the infinitesimal surface $\mathrm{d}S$ at position $\boldsymbol{r}$ on the spherical shell. Express $\mathrm{d}\boldsymbol{N}$ in terms of $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{B}, \sigma, \mathrm{d}S$ as well as the dot product and the cross product of vectors (it is not necessary to express the vectors in terms of their components).

[2.4] Let us calculate the total torque $\boldsymbol{N}$ around the origin which is exerted on the spherical shell by the magnetic field. For this, integrate $\mathrm{d}\boldsymbol{N}$ from Question [2.3] over the entire spherical shell. Express each component of $\boldsymbol{N}$ using the necessary quantities among ω_x, ω_y, ω_z, B, σ, and R. The following formulas concerning surface integrals may be used:

$$\int_{\Omega_R} \mathrm{d}S\ f(x,y,z) = \int_{\Omega_R} \mathrm{d}S\ f(y,z,x) = \int_{\Omega_R} \mathrm{d}S\ f(z,x,y) = \int_{\Omega_R} \mathrm{d}S\ f(x,y,-z). \quad (1)$$

Here Ω_R is a spherical surface of radius R centered at the origin and $f(x,y,z)$ is an arbitrary function that is surface integrable on Ω_R.

[2.5] Find the moments of inertia of the spherical shell about the x, y and z-axes, respectively. In the calculation, the formulas given in Question [2.4] may be used.

[2.6] By solving the equation of motion for the rotational motion of the spherical shell, find ω_x, ω_y, and ω_z at time t. As an initial condition at time $t = 0$, we assume that the magnitude of the angular velocity is ω_0 (> 0), the angle between the rotation axis and the z-axis is θ ($0 < \theta < \pi/2$), and $\omega_x > 0, \omega_y = 0, \omega_z > 0$. Furthermore, in the case of $\sigma < 0$, $B > 0$, answer whether the direction of precession of $\boldsymbol{\omega}$ is clockwise or counterclockwise when viewed from the positive side of the z-axis.

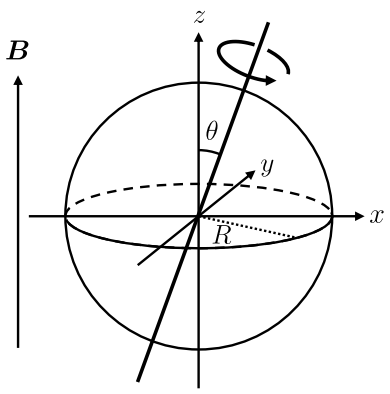

Figure 2

Problem 2

We consider one-dimensional motion of a quantum mechanical particle along the x-axis. The particle is confined in a potential and the Hamiltonian of the system is given by

$$\hat{H} = \begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{m\omega^2}{2}x^2 + V_0 & (x < 0) \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{m\omega^2}{2}x^2 & (x \geq 0). \end{cases} \tag{1}$$

Here, m is the mass of the particle, ω (> 0) is a constant, $\hbar$ is the Planck constant divided by 2π, and V_0 is independent of x.

When $V_0 = 0$, this Hamiltonian corresponds to a harmonic oscillator with angular frequency ω, and the normalized wave functions of the ground state and the first excited state are respectively given by

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right), \tag{2}$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2\alpha}\, x \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right), \tag{3}$$

where α (> 0) is a constant. In this case, the n-th (n is a non-negative integer) normalized energy eigenstate $\psi_n(x)$ is an even function satisfying $\psi_n(0) \neq 0$ for even n and an odd function for odd n. The energy eigenvalue of $\psi_n(x)$ is given by $E_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$.

Answer the following questions.

[1] First, we consider $\psi_0(x)$, which is the ground state at $V_0 = 0$.

[1.1] Express α in terms of m, ω, and $\hbar$.

[1.2] When V_0 takes a small positive value, find the change in the ground state energy from the case $V_0 = 0$ up to first order in V_0.

[2] Next, we consider the limit $V_0 \to \infty$. In this case, the k-th (k is a non-negative integer) normalized energy eigenstate $\phi_k(x)$ is given by

$$\phi_k(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ N\psi_{2k+1}(x) & (x \geq 0). \end{cases} \tag{4}$$

Here, N (> 0) is a normalization constant.

[2.1] Explain the reason why the eigenstate $\phi_k(x)$ is given in the form of Eq. (4).

[2.2] Find the normalization constant N. Also, express the energy eigenvalue $\mathcal{E}_k$ of $\phi_k(x)$ in terms of $\hbar$ and ω.

[3] For time $t < 0$, suppose that $V_0 \to \infty$ and the particle is in the ground state $\phi_0(x)$ of the Hamiltonian. Consider the motion of the particle when V_0 is suddenly changed to 0 at time $t = 0$ and then kept at $V_0 = 0$ thereafter.

[3.1] The normalized wave function at time $t = 0$ can be expressed as

$$\Psi(x, t = 0) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi_j(x) \tag{5}$$

with complex coefficients c_j (j is a non-negative integer) satisfying $c_0 > 0$. Find c_0.

[3.2] At time $t > 0$, express the expectation value $E(t)$ of the energy in terms of $\hbar$ and ω.

[3.3] Express the normalized wave function $\Psi\left(x, t = \dfrac{2\pi}{\omega}\right)$ at time $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ in terms of α. Also show the derivation of this result.

[3.4] Express the normalized wave function $\Psi\left(x, t = \dfrac{\pi}{\omega}\right)$ at time $t = \dfrac{\pi}{\omega}$ in terms of α. Also show the derivation of this result.

Problem 3

We consider a molecular chain consisting of N molecules as a model of rubber elasticity. Each molecule has the length a. The temperature of the molecular chain is denoted by T. Answer the following questions with the Boltzmann constant k_{B}.

[1] First, we consider a one-dimensional molecular chain. The two endpoints of the molecular chain are fixed and the length between them is given by L. As shown in Fig. 1, we represent each molecule by an arrow and the microscopic state of the molecular chain by a sequence of arrows that starts from the left endpoint and ends at the right endpoint. The microscopic state of the molecular chain is specified by the configuration of the arrows, each pointing either right or left. The internal energy U of the molecular chain is assumed to be zero. In the following, we assume N and L/a are even integers.

[1.1] The number of molecules represented by the arrows pointing right is denoted by N_+, and the number of molecules represented by the arrows pointing left is denoted by N_-. Express N_+ and N_- in terms of N, L, and a.

[1.2] Express the total number W of the microscopic states of the molecular chain in terms of N, L, and a.

In the following, we consider the thermodynamic limit where N is large while $L/(Na)$ is fixed and regard L as a state quantity. The entropy of the molecular chain is denoted by S.

[1.3] Obtain the entropy S in terms of N, L, a, and k_{B}. In doing so, use Stirling's formula $\log n! \simeq n \log n - n \ \ (n \gg 1)$.

[1.4] The tension X of the molecular chain is given by $X = \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T$ with the free energy $F = U - TS$. Obtain the tension X. Also, find an expression for X up to first order in L, assuming $L/(Na) \ll 1$.

[1.5] Draw the schematic of the tension X as a function of $L \in (0, Na)$.

Next we consider adiabatic expansion of the rubber. We focus on the rate of temperature change under the adiabatic expansion, $\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S$. In the following, we assume that the molecular chain has the internal energy $U = Nrk_{\mathrm{B}}T$ at temperature T with a constant r due to the presence of internal degrees of freedom of each molecule. Suppose that the contributions to the free energy originating from the internal degrees of freedom of each molecule have no L dependence. Then, the T and L dependence of the tension X is the same as that obtained in Question [1.4].

[1.6] The heat capacity of the molecular chain under constant L is given by C_L. Express $\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S$ in terms of T, C_L, and $\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_L$. You may use the Maxwell relation $\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = -\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_L$.

[1.7] Express $\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S$ up to first order in L, assuming $L/(Na) \ll 1$.

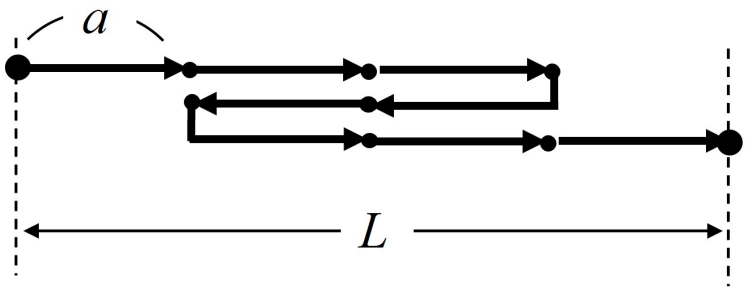

Figure 1

[2] Next, we consider a three-dimensional molecular chain as shown in Fig. 2. One endpoint A of the molecular chain is fixed at the origin while the other endpoint B is subjected to a constant external force X (> 0), which is along the positive z direction and which is independent of the position of B. As shown in Fig. 2, we represent each molecule by an arrow and the microscopic state of the molecular chain by a sequence of arrows that starts from the endpoint A and ends at the endpoint B. The orientation of the arrow representing the i-th molecule is given by (θ_i, ϕ_i) in the polar coordinate representation, and the z coordinate of the endpoint B is given by $a \sum_i \cos\theta_i$. We neglect the internal energy and kinetic energy of molecules.

[2.1] Obtain the partition function Z, such that $Z \to (4\pi)^N$ in the limit of infinite temperature.

[2.2] We consider the thermodynamic limit where N is large and regard the z coordinate of the endpoint B as a state quantity, which is denoted by L. We consider the relationship between X and L at temperature T. Find an expression for the external force X up to first order in L, assuming $Xa/(k_{\mathrm{B}}T) \ll 1$.

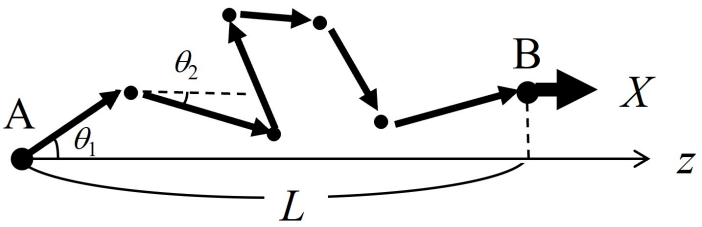

Figure 2

Problem 4

Consider the birefringence of light with angular frequency ω in a crystal with uniaxial anisotropy. It is assumed that light absorption is negligible, and the crystal and the vacuum share the same magnetic permeability μ_0. Let i be the imaginary unit, and ϵ_0 be the electric permittivity of the vacuum. In the following, we use complex representations for the electron displacement, the electric field, and the magnetic field, where the real parts correspond to the physical quantities. The electric flux density $\boldsymbol{D}$ in the crystal is described as

$$\boldsymbol{D} = \tilde{\epsilon}\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \boldsymbol{E} \tag{1}$$

by using the electric permittivity tensor $\tilde{\epsilon}$ and the electric field $\boldsymbol{E}$.

[1] Consider the case where each electron (with mass m and electric charge $-e$) is bound by a potential in the crystal. When the displacement of each electron from its equilibrium position is defined as $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$, the potential energy is given by

$$V(\boldsymbol{u}) = m(\omega_\alpha^2 u_x^2 + \omega_\alpha^2 u_y^2 + \omega_\beta^2 u_z^2)/2 \tag{2}$$

with $\omega_\alpha (\neq \omega)$ and $\omega_\beta (\neq \omega)$ being positive constants. Here, we apply a spatially uniform electric field $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp[-i\omega t]$ oscillating in time t with a real, constant vector $\boldsymbol{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$.

[1.1] Write down the equation of motion for the displacement $\boldsymbol{u}$ of an electron in the crystal.

[1.2] The electric flux density in the crystal is given by $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$, and the electric polarization $\boldsymbol{P}$ is given by $\boldsymbol{P} = -\rho e \boldsymbol{u}$ by using the electron density ρ. Express the electric permittivity tensor $\tilde{\epsilon}$ in terms of $\epsilon_0, m, \rho, e, \omega, \omega_\alpha$, and ω_β.

[2] Consider the case where a plane wave of linearly polarized light is incident from the vacuum onto a flat boundary of the crystal, causing reflected and transmitted light. We use a Cartesian coordinate frame xyz as shown in Fig. 1, with its z-axis normal to the boundary plane. In the following, it is assumed that the electric permittivity tensor $\tilde{\epsilon}$ of the crystal has only diagonal components $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_\mathrm{n}$ and $\epsilon_{zz} = \epsilon_\mathrm{a}$ ($\epsilon_\mathrm{n} > \epsilon_\mathrm{a} > \epsilon_0$), with all off-diagonal components equal to zero. The incident light is characterized by the wave vector $\boldsymbol{k}_\mathrm{i}$, which is parallel to the xz-plane. The angle between the z-axis and $\boldsymbol{k}_\mathrm{i}$ is defined as ϕ_i. The electric and magnetic field components of the incident light at position $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ and time t are described as

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{i}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{i},0} \exp[i(\boldsymbol{k}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)], \tag{3}$$

$$\boldsymbol{H}_\mathrm{i}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{i},0} \exp[i(\boldsymbol{k}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)]. \tag{4}$$

The reflected light is a plane wave characterized by the wave vector $\boldsymbol{k}_\mathrm{r}$. When the incident light is S-polarized (i.e., when its electric field has only the y component), the transmitted light is characterized by the wave vector $\boldsymbol{k}_\mathrm{t1}$ and its electric and magnetic field components are described as

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{t1}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{t1},0} \exp[i(\boldsymbol{k}_\mathrm{t1} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)], \tag{5}$$

$$\boldsymbol{H}_\mathrm{t1}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{t1},0} \exp[i(\boldsymbol{k}_\mathrm{t1} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)]. \tag{6}$$

Similarly, when the incident light is P-polarized (i.e., when its electric field has only the x and z components), the transmitted light is characterized by the wave vector $\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}2}$ and its electric and magnetic field components are described as

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}2}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{t}2,0}\exp[i(\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}2}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)], \tag{7}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}2}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{t}2,0}\exp[i(\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}2}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]. \tag{8}$$

Here, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}$, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}1}$, and $\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}2}$ are parallel to the xz plane (i.e., the plane of incidence), and the angle between the z-axis and $\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}1}$ ($\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}2}$) is defined as $\phi_{\mathrm{t}1}$ ($\phi_{\mathrm{t}2}$). Note that $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i},0}, \boldsymbol{E}_{\mathrm{t}1,0}, \boldsymbol{E}_{\mathrm{t}2,0}, \boldsymbol{H}_{\mathrm{i},0}, \boldsymbol{H}_{\mathrm{t}1,0}$, and $\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}2,0}$ are real, constant vectors.

[2.1] Express $\sin\phi_{\mathrm{t}1}$ and $\sin\phi_{\mathrm{t}2}$ using the necessary quantities among $\phi_{\mathrm{i}}, |\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}|, |\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}1}|$, and $|\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}2}|$. Use the fact that the tangential components of the electric and magnetic fields are continuous everywhere on the boundary plane ($z = 0$).

[2.2] Prove that the relation

$$\boldsymbol{D} = \frac{|\boldsymbol{k}|^2}{\mu_0\omega^2}(\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{e}) \tag{9}$$

holds for a plane electromagnetic wave with angular frequency ω in the crystal, where $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ represents the unit vector along the wave vector $\boldsymbol{k}$. You may use $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu_0(\partial\boldsymbol{H}/\partial t)$ and $\nabla\times\boldsymbol{H} = (\partial\boldsymbol{D}/\partial t)$ from Maxwell's equations, as well as the formula $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ for arbitrary vectors $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, and $\boldsymbol{c}$.

[2.3] Express $|\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}1}|$ in terms of $\epsilon_{\mathrm{n}}, \mu_0$, and ω by solving Eq. (9) for S-polarized light.

[2.4] For S-polarized light, express the angle between the z-axis and $\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}1,0}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}1,0}$ (a vector parallel to the ray direction of the transmitted light in the crystal) using the necessary quantities among $\epsilon_{\mathrm{n}}, \epsilon_{\mathrm{a}}$, and $\phi_{\mathrm{t}1}$.

[2.5] Express $|\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}2}|$ in terms of $\epsilon_{\mathrm{n}}, \epsilon_{\mathrm{a}}, \mu_0, \omega$, and $\phi_{\mathrm{t}2}$ by solving Eq. (9) for P-polarized light.

[2.6] For P-polarized light, $\theta_{\mathrm{t}2}$ is defined as the angle between the z-axis and $\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}2,0}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}2,0}$ (a vector parallel to the ray direction of the transmitted light in the crystal). Express $\tan\theta_{\mathrm{t}2}$ using the necessary quantities among $\epsilon_{\mathrm{n}}, \epsilon_{\mathrm{a}}$, and $\phi_{\mathrm{t}2}$.

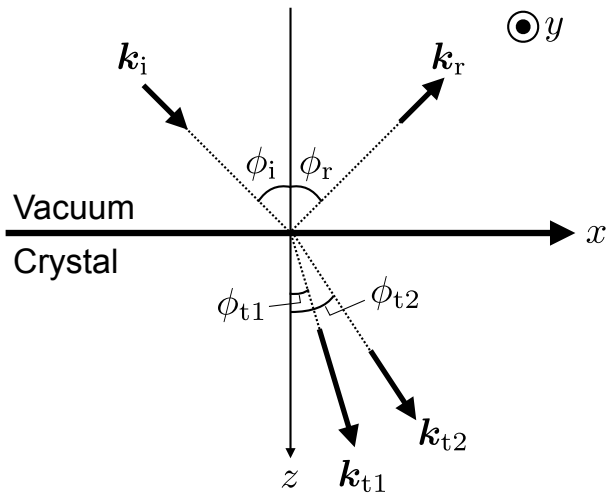

Figure 1

Department of Applied Physics
Entrance Examination Booklet

Physics

(Answer the 4 Problems in this Booklet)

August 26 (Tuesday) 9:00 – 13:00, 2025

GENERAL INSTRUCTIONS

1. Do not open this booklet before the start is announced.
2. Inform the staff when you find misprints in the booklet.
3. Answer the four problems in this booklet.
4. Use one answer sheet for each problem (four answer sheets are given). You may use the back side of each answer sheet if necessary.
5. Write down the number of the problem which you answer in the given space at the top of the corresponding answer sheet.
6. You may use the draft sheets of this booklet to make notes, but you must not detach them.
7. Any answer sheet with marks or symbols irrelevant to your answers will be considered invalid.
8. Do not take this booklet and the answer sheets with you after the examination.

Examinee number	No.

Write down your examinee number above

日本語の注意事項はおもて表紙にある。