物 理 工 学 専 攻
入 学 試 験 問 題

物　理　学

（４問出題，４問解答）

２０２４年８月２７日（火）　９：００～１３：００

注意事項

１．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
２．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
３．出題された４問とも解答すること。
４．答案用紙が４枚渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
５．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
６．下書用紙は本冊子から切り離さないこと。
７．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
８．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

バネの一端に繋がれた質量 m の粒子の 1 次元運動を考える。バネの他端は不動壁に繋がれていて、バネ定数を $m\omega_0^2$ とする $(\omega_0 > 0)$。粒子の位置 $x(t)$ は、バネが自然長であるときをゼロとする。粒子は摩擦力 $-\zeta\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ と外力 $f(t)$ を受けるとする。ここで $\zeta\ (>0)$ は摩擦係数、t は時間を表す。以下では i を虚数単位とする。

[1] まず外力 $f(t)$ が角周波数 $\Omega\ (>0)$ で周期的に振動する力である場合を考える。ここで、位置 $x(t)$ と外力 $f(t)$ を複素数表示で表し、$f(t) = F_0 e^{i\Omega t}$ とする。

[1.1] 定常状態における $x(t)$ を求めよ。

[1.2] 応答関数 $\varepsilon = x(t)/f(t)$ を定義するとき、ε の実部 ε' と虚部 ε'' の Ω 依存性を求めよ。

[1.3] $\zeta \ll m\omega_0$ かつ $|\Omega - \omega_0| \ll \omega_0$ のとき、ε' と $-\varepsilon''$ の Ω 依存性の概形を図示せよ。その際に、ε' と $-\varepsilon''$ の極値に対応する角周波数を付記せよ。

[2] 次に外力 $f(t)$ が揺動力である場合を考える。ここで、位置 $x(t)$ と外力 $f(t)$ を実数表示で表す。$f(t)$ は $\langle f(t)f(t+\tau)\rangle = I\delta(\tau)$ と $\langle f(t)\rangle = 0$ を満たすランダムな関数で表されるとする。I は正の定数とする。$\langle a\rangle$ は物理量 a のアンサンブル平均 (無数の同一な力学系の集団における平均) を表す。$\delta(\tau)$ はディラックのデルタ関数である。以下では $\zeta < 2m\omega_0$ のときの粒子の運動の定常状態を考える。

[2.1] $\left\langle \left(\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 \right\rangle = \overline{v^2}$ とおくとき、粒子の平均二乗変位 $\langle x(t)^2\rangle$ を $\overline{v^2}$ で表せ。また導出過程も示せ。ただし、$f(t)$ と $x(t)$ に相関がないこと $\langle f(t)x(t)\rangle = \langle f(t)\rangle\langle x(t)\rangle$ を用いてよい。

[2.2] $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\ \mathrm{d}t$ を $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を用いて表せ。また、$x(t)$ のパワースペクトル $I_x(\omega) = \langle |X(\omega)|^2\rangle$ を $f(t)$ のパワースペクトル $I_f(\omega) = \langle |F(\omega)|^2\rangle$ を用いて表せ。

[2.3] 一般に実関数 $a(t)$ で表される物理量のパワースペクトル $I_a(\omega)$ と $a(t)$ の相関関数 $\langle a(t)a(t+\tau)\rangle$ との間に $I_a(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \langle a(t)a(t+\tau)\rangle e^{-i\omega\tau}\ \mathrm{d}\tau$ の関係がある。これを用いて、$x(t)$ の相関関数 $\langle x(t)x(t+\tau)\rangle$ を求めよ。ただし、$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{\zeta^2}{4m^2}}$ とおいて、ω_1 を答えの表式に含めてもよい。

[2.4] 問 [2.3] で求めた相関関数に $\tau = 0$ を代入し、問 [2.1] の結果と比較して、I を $\overline{v^2}$ を用いて表せ。

第 2 問

1 次元におけるポテンシャル障壁に散乱される量子力学的な粒子を考えよう。時間に依存しないシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\psi(x)=\mathcal{E}\psi(x) \tag{1}$$

と書ける。m を粒子の質量、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものとし、$V(x)$ はポテンシャル、$\mathcal{E}$ は粒子のエネルギーである。ここでは、x 軸正方向に進む粒子が障壁に入射する場合を考える。i を虚数単位として、以下の問いに答えよ。

[1] $V(x)=V_0\ (|x|\leq a),\ V(x)=0\ \ (|x|>a)$ で与えられるポテンシャル障壁を考える。$0<\mathcal{E}<V_0$ のとき、粒子の波動関数は

$$\psi(x)=\begin{cases}Ae^{ikx}+Be^{-ikx} & (x<-a)\\ Ce^{\gamma x}+De^{-\gamma x} & (|x|\leq a)\\ Ee^{ikx} & (x>a)\end{cases} \tag{2}$$

と書ける。ただし、$k=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\mathcal{E}},\ \gamma=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-\mathcal{E})}$ であり、V_0, a は正の定数とする。以下の問 [1.1]∼[1.5] では、$\mathcal{E}, V_0$ は用いずに k, γ を用いて答えよ。

[1.1] 波動関数とその導関数が連続であるという境界条件より、係数 A, B, C, D の間に成り立つ関係式を二つ求めよ。

[1.2] 同様に、係数 C, D, E の間に成り立つ関係式を二つ求めよ。

[1.3] 問 [1.1], [1.2] で導かれた式より、

$$\frac{B}{E}=\left(\frac{ik-\gamma}{2ik}\right)\left(\frac{ik+\gamma}{2\gamma}\right)e^{-2\gamma a}-\left(\frac{ik+\gamma}{2ik}\right)\left(\frac{ik-\gamma}{2\gamma}\right)e^{2\gamma a} \tag{3}$$

が得られる。この関係を用いて、粒子がポテンシャル障壁を透過する確率（透過率）T_1 を求めよ。ここで、双曲線関数 $\cosh(\alpha)=\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$ 及び $\sinh(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$ を用いてもよい。

[1.4] $\frac{\gamma}{k}\ll 1,\ a\gamma\ll 1$ のとき、T_1 を k, a を用いて表せ。

[1.5] $a\gamma\gg 1$ のとき、T_1 を k, γ, a を用いて表せ。

[2] 問 [1] と同じポテンシャル障壁において、$\mathcal{E}>V_0$ の場合を考える。以下の問 [2.1] 及び [2.2] では、k, γ は用いずに $\mathcal{E}, V_0$ を用いて答えよ。

[2.1] このときの透過率 T_2 の $\mathcal{E}$ 依存性を求めよ。

[2.2] $\mathcal{E}\gg V_0$ における T_2 の値に注意して、横軸を $\frac{\mathcal{E}}{V_0}$ とし T_2 の $\mathcal{E}$ 依存性の概形を図示せよ。また、T_2 が極大となる条件をすべて求めよ。

[3] 次に $V(x)=0\ (x<-a),\ V(x)=V_0\ (|x|\leq a),\ V(x)=-V_1\ (x>a)$ で与えられるポテンシャル障壁による粒子の散乱を考える。ただし、$V_1>0,\ 0<\mathcal{E}<V_0$ とする。

[3.1] 透過率 T_3 と反射率 R_3 を求めよ。ただし、$k=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\mathcal{E}},\ \gamma=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-\mathcal{E})},\ k_1=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mathcal{E}+V_1)}$ として、$\mathcal{E}, V_0, V_1$ は用いずに k, γ, k_1 を用いて答えよ。

[3.2] $\mathcal{E}$ を固定し V_1 を大きくするときの T_3 の漸近値を求めよ。

第 3 問

自然数 N に対して N 個のスピンが各々他の全てのスピンと等しい結合定数で相互作用しているイジング模型を考える。エネルギーは以下で与えられる。

$$E = -\frac{J}{N}\sum_{\alpha<\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta \tag{1}$$

ここで、σ_α と σ_β はそれぞれ ±1 の値をとる変数であり、J はゼロではない実数である。また、α と β は自然数であり、$1 \leq \alpha \leq N$ と $1 \leq \beta \leq N$ を満たすものとし、和は $\alpha < \beta$ を満たす全ての組み合わせに対してとるものとする。

[1] まず $N = 2, 3$ の場合を考える。

[1.1] $N = 2$ のとき、式 (1) は

$$E = -\frac{J}{2}\sigma_1\sigma_2 \tag{2}$$

となる。エネルギー E のとりうる値と対応する縮退度 W を全て求めよ。

[1.2] $N = 3$ のとき、式 (1) は

$$E = -\frac{J}{3}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right) \tag{3}$$

となる。エネルギー E のとりうる値と対応する縮退度 W を全て求めよ。

[1.3] $N = 3$ のときの基底状態の縮退度 W を J が正負の場合に分けてそれぞれ求めよ。

[2] 次に N が一般の自然数の場合を考える。総スピンを

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\sigma_\alpha = N - 2M \tag{4}$$

とする。ここで M は $\sigma_\alpha = -1$ をとるスピンの数である。

[2.1] エネルギー E を M を用いて表せ。

[2.2] 基底状態のエネルギー E と縮退度 W を J が正負の場合に分けてそれぞれ求めよ。

（次のページに続く）

以下では $N \gg 1$ かつ $J > 0$ とする。$\sigma_\alpha = -1$ をとるスピンの割合を $m = M/N$ とし、温度 T の熱平衡状態を考える。エントロピーを S、熱容量を C とする。また、ボルツマン定数を k_{B} とする。

[3] $0 < m < 1/2$ の熱平衡状態を考える。

[3.1] E/N を m の関数として求めよ。

[3.2] S/N を m の関数として求めよ。ここで、n が十分に大きいときに良い近似であるスターリングの公式

$$\log n! \simeq n \log n - n \tag{5}$$

を用いること。

[3.3] 問 [3.1] と [3.2] の結果と関係式

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{T} \tag{6}$$

を用いて m の関数として温度 T を求めよ。

[3.4] 低温極限 $k_{\mathrm{B}}T \ll J$ では $m \ll 1$ が成り立つ。このときの m の温度依存性を求めよ。

[3.5] 問 [3.4] で求めた結果を用いて、低温極限での S/N の温度依存性を求めよ。

[3.6] 問 [3.5] で求めた結果を用いて、低温極限での C/N の温度依存性を求めよ。

[4] ある臨界温度 T_{c} 以上の熱平衡状態では $m = 1/2$ が成り立つ。式 (6) において $m \to 1/2$ の極限を考えることで、その温度 T_{c} を求めよ。

第 4 問

気体原子が電子と正イオンに分離した電気的に中性で一様なプラズマがある。このプラズマ中を z 軸の正の向きに進む角周波数 $\omega(>0)$ の電磁波を考える。電磁場の作用によって電子だけが運動し、正イオンの運動は無視できるものとする。電子の質量を m、電荷を $-e$、プラズマ中の電子数密度を N とする。

なお、粒子間のクーロン相互作用、粒子間の衝突、重力の影響はいずれも考えなくてよいものとする。電子の熱運動は等方的であり、電流密度には影響しないものとする。電子の速さは真空中の光速 c に比べて十分小さく、電子が電磁波の磁場から受ける力は無視できるものとする。電磁波の電場 $\boldsymbol{E}$、電子の速度 $\boldsymbol{v}$、電流密度 $\boldsymbol{J}$ はいずれも x 成分と y 成分だけをもち、z 軸と垂直な面内で一様であるものとして扱う。

以上に述べた仮定の下で、時刻 t における電磁波の電場 $\boldsymbol{E}(z,t)$ に関する以下の波動方程式を考える。

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(z,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2\varepsilon_0}\frac{\partial \boldsymbol{J}(z,t)}{\partial t} \tag{1}$$

ここで ε_0 は真空の誘電率である。

この波動方程式に従う電磁波の電場を、複素数表示で以下のように表す。

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_0 \exp[i(kz-\omega t)] \tag{2}$$

ここで $\boldsymbol{E}_0$ は定ベクトル、i は虚数単位、k は複素数の波数である。解答にあたり、プラズマ周波数 $\omega_{\mathrm{p}} = \sqrt{\dfrac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}}$ を適宜用いよ。

[1] 電子の運動方程式を、電子の速度 $\boldsymbol{v}(z,t)$ および電磁波の電場 $\boldsymbol{E}(z,t)$ を用いて記せ。

[2] 問 [1] の結果を用いて、電流密度の時間微分 $\dfrac{\partial \boldsymbol{J}(z,t)}{\partial t}$ を電磁波の電場 $\boldsymbol{E}(z,t)$ を用いて表せ。

[3] k^2 を角周波数 ω の関数として表せ。また、このプラズマ中を電磁波が長い距離にわたって伝搬するような角周波数 ω の条件を求めよ。

（次のページに続く）

先のプラズマに z 軸の正の向きに磁束密度 $B_z(>0)$ の一様な静磁場をかけた。このプラズマ中を z 軸の正の向きに進む角周波数 ω の電磁波を考える。電子の運動に影響を及ぼす力としては、電磁波の電場と静磁場のみを考える。電磁波の電場 $\boldsymbol{E}$、電子の速度 $\boldsymbol{v}$、電流密度 $\boldsymbol{J}$ はいずれも x 成分と y 成分だけをもつものとし、電磁波の電場を式 (2) のように表す。以下では、電磁波の角周波数 ω およびプラズマ周波数 ω_{p} は、いずれもサイクロトロン周波数 $\omega_{\mathrm{c}} = \dfrac{eB_z}{m}$ より大きいものとする。

[4] 電磁波の電場 $\boldsymbol{E}(z,t)$ および電子の速度 $\boldsymbol{v}(z,t)$ の $x,\ y$ 成分を以下のように表す。

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \begin{pmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}(z,t) = \begin{pmatrix} v_x(z,t) \\ v_y(z,t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

電子の運動方程式を x 成分と y 成分のそれぞれについて記せ。

[5] 電流密度 $\boldsymbol{J}(z,t)$ は $\exp[i(kz-\omega t)]$ に比例するものとする。このとき、電流密度を 2 行 2 列の行列 $\boldsymbol{\sigma}$ を用いて

$$\boldsymbol{J}(z,t) = \begin{pmatrix} J_x(z,t) \\ J_y(z,t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

と表す。行列 $\boldsymbol{\sigma}$ を $\varepsilon_0,\ \omega,\ \omega_{\mathrm{c}},\ \omega_{\mathrm{p}}$ を用いて表せ。

[6] 式 (1) より、以下の形の固有方程式が得られる。

$$\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \end{pmatrix} = k^2 \begin{pmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

ここで、$\boldsymbol{A}$ は 2 行 2 列の行列である。行列 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[(1-\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] \tag{6}$$

と表すとき、$\omega,\ \omega_{\mathrm{c}},\ \omega_{\mathrm{p}}$ を用いて α と β を表せ。

[7] 式 (5) の固有値 k^2 と対応する固有ベクトルを全て求めよ。ただし k^2 に関しては $c,\ \omega,\ \omega_{\mathrm{c}},\ \omega_{\mathrm{p}}$ を用いて表せ。また、このプラズマ中を z 軸の正の向きに長い距離にわたって伝搬する固有モードが二つ存在するような角周波数 ω の条件を求めよ。

[8] 角周波数 ω が問 [7] で求めた条件を満たす場合について考える。二つの固有モードの波数を $k_+,\ k_-$ とする（ただし $k_+ > k_- > 0$）。位置 $z=0$ における電磁波の電場が定数 E_0 を用いて

$$\boldsymbol{E}(0,t) = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\omega t) \tag{7}$$

と表されるとき、位置 $z(>0)$ における電場 $\boldsymbol{E}(z,t)$ を $k_+,\ k_-$ を用いて表せ。また、この電磁波が z 軸の正の向きに伝搬するとともに偏光状態がどのように変化するか、説明せよ。