物 理 工 学 専 攻
入 学 試 験 問 題

物　理　学

（４問出題，４問解答）

２０２２年8月３０日（火）　９：００～１３：００

注意事項

１．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
２．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
３．出題された４問とも解答すること。
４．答案用紙が４枚渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
５．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
６．下書用紙は本冊子から切り離さないこと。
７．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
８．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

1 次元と 2 次元のそれぞれにおいて、無限の深さの井戸型ポテンシャルに束縛された量子力学的な粒子を考える。m を粒子の質量、i を虚数単位、a を正の定数、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったものとする。以下の問いにおいてスピンの自由度は無視し、波動関数は常に規格化されているものとする。また、以下の関係式を用いても良い。

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin(\pi x)\mathrm{d}x &= \frac{32}{9\pi^2} \\
\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos(\pi x)\mathrm{d}x &= \frac{4}{3\pi} \\
\int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin(\pi x)\mathrm{d}x &= \frac{8}{3\pi}
\end{aligned}
$$

[1] 1 次元の場合を考える。時間に依存しないシュレーディンガー方程式は、

$$\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

と書ける。ただし、エネルギー固有値を $E_1 < E_2 < E_3 \cdots$ とし、E_n（n は 1 以上の整数）に対応する固有状態の波動関数を $\psi_n(x)$ とする。また、ハミルトニアン $\hat{H}$ は

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \\
V(x) &= \begin{cases} 0 & (|x| \leq a) \\ \infty & (|x| > a) \end{cases}
\end{aligned}
$$

と書けるとする。

[1.1] $\psi_n(x)$ および E_n を求めよ。ただし、$\psi_n(x)$ は実関数とする。

[1.2] 波動関数 $\psi(x)$ を $\psi(x) \to \psi(-x)$ と変換する演算子を $\hat{P}$ とする。$\psi_n(x)$ が $\hat{P}$ の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。

[2] 2 次元の場合を考える。ハミルトニアン $\hat{H}$ を

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + V(x, y) \\
V(x, y) &= \begin{cases} 0 & (|x| \leq a \text{ かつ } |y| \leq a) \\ \infty & (|x| > a \text{ または } |y| > a) \end{cases}
\end{aligned}
$$

とすると、問 [1] の $\psi_n(x)$ を用いた $\Psi_{n_x,n_y}(x, y) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)$（$n_x$および n_y はそれぞれ 1 以上の整数）はエネルギー固有状態である。基底状態は $\Psi_{1,1}(x, y)$、第一励起状態は $\Psi_{2,1}(x, y)$ と $\Psi_{1,2}(x, y)$ の線形結合、第二励起状態は $\Psi_{2,2}(x, y)$ である。

[2.1] 波動関数 $\Psi(x, y)$ を $\Psi(x, y) \to \Psi(y, x)$ と変換する演算子を $\hat{M}$ とする。基底状態 $\Psi_{1,1}(x, y)$ と第二励起状態 $\Psi_{2,2}(x, y)$ が $\hat{M}$ の固有状態であることを示し、それらの固有値を求めよ。

[2.2] 第一励起状態のうち $\Psi_{2,1}(x,y)$ と $\Psi_{1,2}(x,y)$ は $\hat{M}$ の固有状態ではないが、これらの適切な線形結合は $\hat{H}$ と $\hat{M}$ の同時固有状態となる。そのような同時固有状態とそれに対応する $\hat{M}$ の固有値の組をすべて求めよ。ただし、同時固有状態は $\Psi_{2,1}(x,y)$ と $\Psi_{1,2}(x,y)$ の線形結合で表し、$\Psi_{2,1}(x,y)$ の係数が正の実数となるようにせよ。

[2.3] 問 [2.2] で求めた各状態に関して、角運動量演算子 $\hat{L} = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ の期待値を求めよ。

[2.4] 波動関数 $\Psi(x,y)$ を $\Psi(x,y) \to \Psi(-y,x)$ と変換する演算子を $\hat{C}_4$ とする。基底状態 $\Psi_{1,1}(x,y)$ と第二励起状態 $\Psi_{2,2}(x,y)$ が $\hat{C}_4$ の固有状態であることを示し、それらの固有値を求めよ。

[2.5] 第一励起状態のうち $\Psi_{2,1}(x,y)$ と $\Psi_{1,2}(x,y)$ は $\hat{C}_4$ の固有状態ではないが、これらの適切な線形結合は $\hat{H}$ と $\hat{C}_4$ の同時固有状態となる。そのような同時固有状態とそれに対応する $\hat{C}_4$ の固有値の組をすべて求めよ。ただし、同時固有状態は $\Psi_{2,1}(x,y)$ と $\Psi_{1,2}(x,y)$ の線形結合で表し、$\Psi_{2,1}(x,y)$ の係数が正の実数となるようにせよ。

[2.6] 問 [2.5] で求めた各状態に関して、角運動量演算子 $\hat{L} = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ の期待値を求めよ。

第2問

パラメーター励振とは、系のパラメーターの周期的な変化のもとでの振動現象である。パラメーター励振を示す簡単な例として、図1に示したような系を考える。長さ L の棒に吊るされた質量 m のおもりで構成された振り子の支点が、鉛直方向に振幅 $a(\geq 0)$ および角振動数 $\Omega(>0)$ で振動している。時刻 t におけるおもりの位置を直交座標で (x, y) とし、座標原点を図1のようにとる。y 座標は鉛直下向きを正に取っていることに注意せよ。また、支点の位置座標を $(0, a\cos\Omega t)$ とする。棒の張力を $T(>0)$ とし、棒は変形せず、その質量は無視できるとする。角度 θ は図1のように鉛直方向から測った棒の角度とする。重力加速度を $g(>0)$ とする。空気抵抗や支点における摩擦や、おもりの大きさは無視する。以下では上付きのドットは時間微分を表す。

[1] 時刻 t におけるおもりの位置座標 (x, y) を L, θ, a, Ω, t を用いて表せ。

[2] (x, y) に関する運動方程式を $\ddot{x}, \ddot{y}, m, T, \theta, g$ を用いて表せ。

[3] 問[1]の結果を微分することで、$\ddot{x}$ と $\ddot{y}$ を $L, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, a, \Omega, t$ を用いて表せ。

[4] θ に関する運動方程式を書け。ただし張力 T は答えに用いてはならない。

[5] θ が微小だと仮定し、$\sin\theta$ を θ と近似する。以下の問いではこの近似を常に用いる。$a = 0$ の場合について、問[4]で求めた運動方程式の解 $\theta_0(t)$ を求めよ。ただし、$\theta_0(0) = A,\ \dot{\theta}_0(0) = 0$ とする。また、このときの固有角振動数 $\omega_0(>0)$ を g, L を用いて表せ。

[6] 問[5]で求めた $\theta_0(t)$ を用いて a が小さいときの解を $\theta(t) = \theta_0(t) + a\theta_1(t)$ とおく。a に関する摂動展開により解が求まると仮定して、1次摂動の条件から、$\theta_1(t)$ が満たす方程式を書け。

[7] 問[6]で導いた方程式の解 $\theta_1(t)$ を求めたい。ω_0 を問[5]で求めた固有角振動数として、時間に依存しない定数 u_1 と u_2 を用いて以下の形の特殊解を仮定する。

$$\theta_1(t) = u_1\cos[(\Omega + \omega_0)t] + u_2\cos[(\Omega - \omega_0)t] \tag{1}$$

このような特殊解をとることができる条件を Ω, g, L を用いて表せ。さらに、その場合の u_1 と u_2 を求め、L, A, Ω, g のみを用いて表せ。

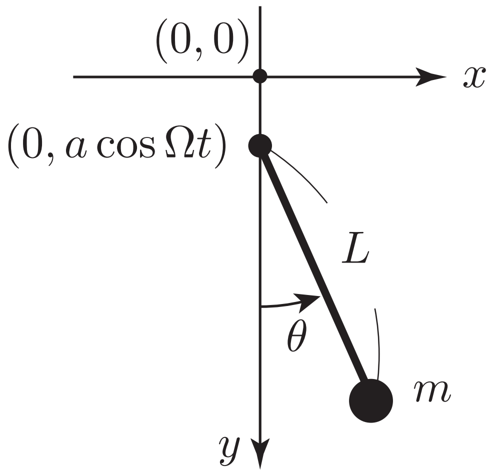

図 1

第 3 問

熱容量および質量が大きい容器内部の円柱状の空洞に、$N(\gg 1)$ 個の同種粒子からなる気体が閉じ込められている。空洞の高さを L、半径を R とする。また、$\nu = N/L$ とする。空洞の中心を原点 O とし、回転対称軸が z 軸となるように、静止した直交座標系 xyz をとる（図 1）。ボルツマン定数を k、プランク定数を h とする。

以下では、角運動量ベクトルの z 成分を単に角運動量と表記する。容器の内側側面にかかる圧力を側圧と呼ぶ。正数 t の自然対数を $\log t$ と表記する。

1 個の粒子の位置をベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ で表し、対応する運動量ベクトルを $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ と表記する。1 粒子の質量を m、ハミルトニアンを $H_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/(2m)$ とし、角運動量を $M_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = xp_y - yp_x$ とする。N 粒子のハミルトニアンは、1 粒子のハミルトニアンの和で書けるとする。1 粒子の相空間上の分布を表す確率密度関数を $\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ と書く。

粒子の運動は古典力学により扱い、粒子に対する重力の影響は無視する。なお、広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ を用いてよい。

[1] 容器が静止した床に固定され、温度 T の熱浴と見なせる場合を考える（図 2）。容器と気体が熱平衡にあるとする。半径 R は十分に大きく、N 個の粒子の運動はカノニカル分布に従うとする。このとき、1 粒子の確率密度関数 $\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ は

$$\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{h^3 L \tilde{Z}_1} \exp\left(-\frac{H_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})}{kT}\right)$$

と書ける。ただし、$\tilde{Z}_1$ は $\boldsymbol{r}$ にも $\boldsymbol{p}$ にも依存しない量である。以下の問いに答えよ。

[1.1] $\tilde{Z}_1$ は温度 T および半径 R の関数とみなせる。確率密度関数 $\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ の規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p_y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p_z \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}z \int_{x^2+y^2 \le R^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = 1$$

を用いて $\tilde{Z}_1(T, R)$ を計算し、kT, R および $\gamma = \pi^{5/2}(2m)^{3/2}h^{-3}$ を用いて書け。

[1.2] この気体のヘルムホルツの自由エネルギーを F とし、$\tilde{F} = F/L$ とする。N 粒子の分配関数について、$\nu = N/L$ を一定にして $N, L \to \infty$ とする極限を考えることで、$\tilde{F}$ を求め $kT, \nu, \tilde{Z}_1(T, R)$ を用いて表せ。なお、近似 $\log N! \approx N \log N - N$ を用いてよい。

[1.3] 空洞の半径 R を仮想的に微小変化させるのに必要な仕事を考えることで、側圧 P を問 [1.2] の自由エネルギー F から計算し、$kT, R, \nu, \tilde{Z}_1(T, R)$ および偏導関数 $\left(\frac{\partial \tilde{Z}_1(T,R)}{\partial R}\right)_T$ を用いて表せ。また、問 [1.1] の答えを $\tilde{Z}_1(T, R)$ に代入し、kT, R, ν を用いて P を表せ。

[2] 容器が上面の中心で吊るされ、z 軸のまわりに摩擦なく自由に回転できる場合を考える（図 3）。容器は z 軸のまわりに回転対称性を持つとする。容器は一定の角速度 ω で z 軸のまわりに回転しており、その温度は T である。この容器と気体は熱平衡にあり、1 粒子の確率密度関数 $\rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ は

$$\rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{h^3 L \tilde{Z}_1} \exp\left(-\frac{H_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) - \omega M_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})}{kT}\right)$$

と書けるとする。ただし、$\tilde{Z}_1$ は $\boldsymbol{r}$ にも $\boldsymbol{p}$ にも依存しない量である。以下の問いに答えよ。

[2.1] 位置 $\boldsymbol{r}$ が空洞内に限られることに注意して、相空間における $H_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) - \omega M_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ の最小値を求め、R, ω, m を用いて表せ。

[2.2] 位置 $\boldsymbol{r}$ 付近にいる粒子の速度ベクトルの期待値を $(v_x(\boldsymbol{r}), v_y(\boldsymbol{r}), v_z(\boldsymbol{r}))$ とする。$v_x(\boldsymbol{r})$ および $v_y(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

[2.3] $\tilde{Z}_1$ は温度 T、半径 R、および角速度 ω の関数とみなせる。この場合の $\tilde{Z}_1(T, R, \omega)$ を計算し、kT, R, m, ω および $\gamma = \pi^{5/2}(2m)^{3/2}h^{-3}$ を用いて書け。

[2.4] 側圧 P を、kT, R, ω, ν, m を用いて表せ。また、角速度 ω を一定として温度を低くする極限での P の値を求めよ。

[2.5] この気体の z 軸まわりの慣性モーメント I を計算し、kT, ω, N および $\varepsilon = mR^2\omega^2/2$ を用いて表せ。

[2.6] 角速度 ω が一定の条件下でのこの気体の熱容量 C_ω を計算し、k, T, N および $\varepsilon = mR^2\omega^2/2$ を用いて表せ。また、高温および低温極限での熱容量 C_ω の値を求めよ。

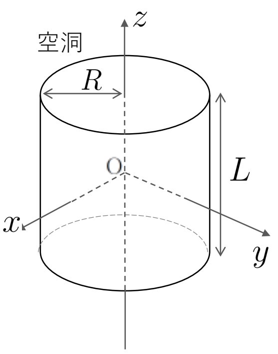

図1

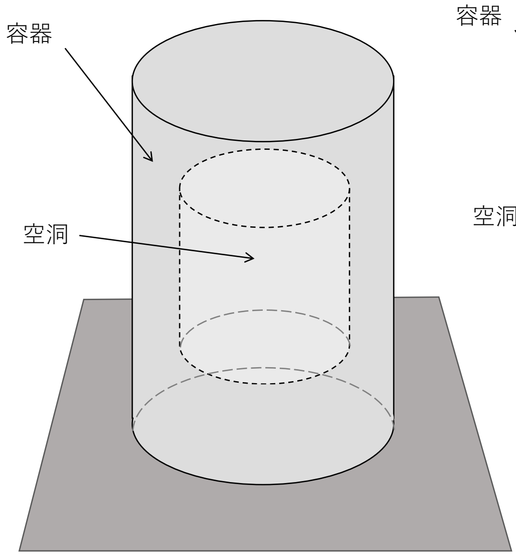

図2

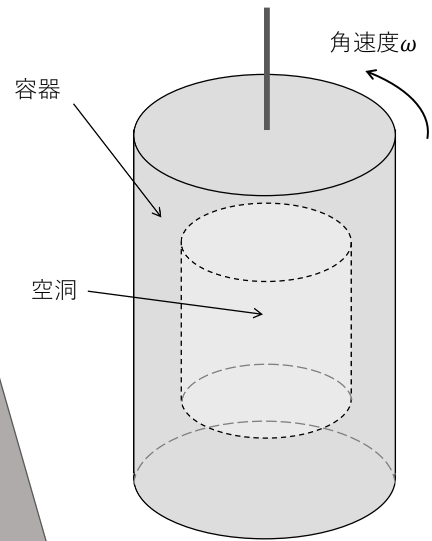

図3

第 4 問

真空中における質量 m、電荷 $q\ (>0)$ の古典的な荷電粒子を、電磁場を用いて座標原点 $(0,0,0)$ 付近の有界な領域に閉じ込める方法を考えよう。荷電粒子の時刻 t における位置座標を $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ とする。荷電粒子の速さは光速に比べて十分に小さく、また荷電粒子自身が作る電磁場の影響は無視できるものとする。i を虚数単位として、以下の問いに答えよ。

[1] まず、静電場を印加し、位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ におけるスカラーポテンシャルが

$$\phi(\boldsymbol{r})=ax^2+by^2+cz^2 \tag{1}$$

となるように設定する。ここで、a, b, c は定数である。電場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ で与えられるものとする。

[1.1] 式 (1) のスカラーポテンシャルにおいて、もし a, b, c が全て正となれば、荷電粒子を有界な領域に閉じ込めることができる。しかし、実際には $a+b+c=0$ が成り立つため、a, b, c が全て正となるような静電場は印加できない。式 (1) において $a+b+c=0$ が成り立つことを示せ。

以下では、式 (1) のスカラーポテンシャルに加え、一様な静磁場を印加して、荷電粒子を有界な領域に閉じ込める方法を考える。そこで、式 (1) において $a=b=-\dfrac{c}{2}<0$ と設定し、さらに磁束密度 $\boldsymbol{B}=(0,0,B)$ の静磁場を印加した場合を考える。

[1.2] 荷電粒子が静電場と静磁場から受ける力を考え、荷電粒子の位置 $\boldsymbol{r}(t)$ に関する運動方程式を $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$, m, q, $\phi\left(\boldsymbol{r}(t)\right)$, $\boldsymbol{B}$ を用いて表せ。

[1.3] 荷電粒子は z 軸方向については閉じ込められ、単振動を行う。その角振動数を m, q, c を用いて表せ。

[1.4] $u(t)=x(t)+iy(t)$ とおくとき、$u(t)$ が満たす運動方程式を $u(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2}$, m, q, c, B を用いて表せ。

[1.5] 荷電粒子がどのような初期条件に対しても x 軸および y 軸方向について有界な領域に閉じ込められるために、m, q, c, B が満たすべき条件を求めよ。

[2] 次に、式 (1) の代わりに、位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ におけるスカラーポテンシャルが

$$\tilde{\phi}(\boldsymbol{r},t)=(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)\cos\omega t \tag{2}$$

のように角振動数 ω で時間変化する場合を考える。ここで、α, β, γ は定数である。このとき、適切な条件のもとで荷電粒子を x, y, z 軸全ての方向について有界な領域に閉じ込めることができる。以下では、その理由を荷電粒子の x 軸方向の運動に着目して考えよう。なお、磁場は無視できるものとし、電場は $\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=-\nabla\tilde{\phi}(\boldsymbol{r},t)$ で与えられるものとする。

[2.1] $\tau=\dfrac{\omega t}{2}$ とおくとき、荷電粒子の位置の x 成分は τ の関数として $x(\tau)$ と表せる。このとき、$x(\tau)$ が従う運動方程式は、ある定数 λ を用いて

$$\frac{\mathrm{d}^2x(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2}+2\lambda x(\tau)\cos 2\tau=0 \tag{3}$$

と書ける。λ を求めよ。

[2.2] ある初期条件のもとで、式 (3) の解が、

$$x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cos\left[(2n+\Omega)\tau\right] \tag{4}$$

の形で与えられるとする。ここで、Ω, C_n（n は整数）は τ に依存せず、$0 < \Omega < 1$ である。Ω, C_{n-1}, C_n, C_{n+1} の間に成り立つ関係式を λ と n を用いて表せ。

[2.3] 問 [2.2] において $0 < \lambda \ll 1$ のとき、式 (4) における C_{-1}, C_0, C_1 以外の C_n の寄与を無視でき、また問 [2.2] で求めた関係式に $n = -1, 0, 1$ を代入したもののみを用いるという近似が導入できる。このもとで、$C_0 \neq 0$ と仮定して $\dfrac{C_{-1}}{C_0}$, $\dfrac{C_1}{C_0}$, Ω を λ の 1 次までの範囲で求めると、定数 ε, δ を用いて $\dfrac{C_{-1}}{C_0} = \dfrac{C_1}{C_0} = \varepsilon\lambda$, $\Omega = \delta\lambda$ となる。ε と δ を求めよ。

[2.4] 問 [2.3] の条件のもとで、式 (3) の解 $x(\tau)$ を C_0, λ, τ を用いて表せ。また、$C_0 > 0$ のとき、$x(\tau)$ を τ の関数としてその概形を図示せよ。