物 理 工 学 専 攻
入 学 試 験 問 題

物　理　学

（４問出題，４問解答）

２０１９年8月２７日（火）　９：００〜１３：００

注意事項

１．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
２．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
３．出題された４問とも解答すること。
４．答案用紙が４枚渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
５．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
６．草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
７．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
８．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

質量 m の質点 N 個が図 1 のようにバネでつながれている一次元系を古典的に扱おう。質点には $n = 1, 2, \ldots, N-1, N$ と番号をつける。両端のバネは不動壁につながれている。バネ定数はすべて k であり、図 1 の状態でバネの長さはいずれも自然長であるものとする。時刻 t における各質点の図 1 の位置からの変位を $x_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots, N-1, N)$ と書く。床との摩擦を無視できるものとして、以下の問に答えよ。

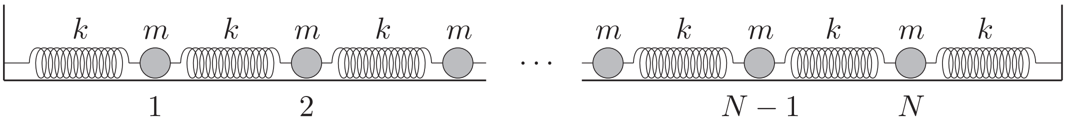

図 1

[1] 第 n 成分が $x_n(t)$ で与えられる N 次元縦ベクトルを $\boldsymbol{x}(t)$ と定義する。

[1.1] 各質点についての運動方程式をまとめて次の形に書くとき、N 次元正方行列 K を求めよ。

$$m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) = -K\boldsymbol{x}(t) \tag{1}$$

[1.2] K の規格化された固有ベクトル $\boldsymbol{u}_\ell$ $(\ell = 1, 2, \ldots, N-1, N)$ は次の形で与えられる。

$$(\boldsymbol{u}_\ell)_n = N_\ell \sin(q_\ell n) \tag{2}$$

ただし、$q_\ell = \dfrac{\pi\ell}{N+1}$ であり、$(\boldsymbol{u}_\ell)_n$ は N 次元縦ベクトル $\boldsymbol{u}_\ell$ の第 n 成分 $(n = 1, 2, \ldots, N-1, N)$ を表す。固有ベクトル $\boldsymbol{u}_\ell$ に対応する K の固有値を求めよ。また、規格化定数 N_ℓ を求めよ。必要であれば $\ell = 1, 2, \ldots, N-1, N$ について成立する公式

$$\sum_{n=1}^{N+1} \cos\left(\frac{2\pi\ell n}{N+1}\right) = 0 \tag{3}$$

を用いてよい。

[1.3] 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_\ell$ を用いて、$\boldsymbol{x}(t)$ を $\boldsymbol{x}(t) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{N} \alpha_\ell(t)\boldsymbol{u}_\ell$ と展開する。 $\boldsymbol{x}(t)$ についての運動方程式 (1) を用いて、$\alpha_\ell(t)$ についての次の微分方程式を導け。

$$\frac{d^2}{dt^2}\alpha_\ell(t) = -\omega_\ell^2\alpha_\ell(t) \tag{4}$$

また、角周波数 ω_ℓ を k, m, および q_ℓ を用いて表せ。ただし、$\omega_\ell > 0$ とする。

[1.4] 問 [1.3] で求めた角周波数 ω_ℓ を q_ℓ の関数として図示せよ。

[2] 図 1 の各質点それぞれに外力を加える。n 番目の質点に作用する外力を f_n、各質点の元の釣り合いの位置から新しい釣り合いの位置までの変位を x_n とする。f_n や x_n を 1 列に並べた N 次元縦ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{x}$ とし、これらを問 [1.2] の $\boldsymbol{u}_\ell$ を用いて $\boldsymbol{x} = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{N} \alpha_\ell \boldsymbol{u}_\ell$, $\boldsymbol{f} = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{N} \beta_\ell \boldsymbol{u}_\ell$ と展開する。

[2.1] 比 α_ℓ/β_ℓ を m と問 [1.3] の ω_ℓ を用いて表せ。

[2.2] 比 α_ℓ/β_ℓ が最大となる ℓ を求めよ。この最大値は $N \gg 1$ において N の関数としてどのように振る舞うか。

[3] 図 2 に模式的に示すように、図 1 の各質点に $\frac{1}{2}k_0 x_n(t)^2$ というポテンシャルを加える。ただし、k_0 (> 0) はポテンシャルの強さを表す定数である。

[3.1] このときの式 (1) の行列 K はどのように変更されるか。また、その固有値、固有ベクトルはどのように変わるか。

[3.2] このときの角周波数 ω_ℓ を k, k_0, m, および問 [1.2] の q_ℓ を用いて表せ。また、最小の角周波数の $N \to \infty$ の極限での値を求めよ。

[3.3] 問 [3.2] で求めた角周波数 ω_ℓ を q_ℓ の関数として図示せよ。

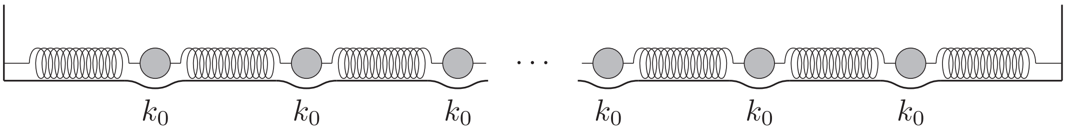

図 2

第 2 問

光学的異方性を持つ媒質中を伝わる角周波数 ω、波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の平面電磁波について考える。$\boldsymbol{k}$ は縦ベクトル $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)^{\mathrm{T}}$ であり、T は転置を意味する。この媒質に電磁波の吸収や散乱がないとき、媒質中の平面波の電場 $\boldsymbol{E}$ 及び磁場 $\boldsymbol{H}$ は、複素数表示を用いて次のように表せる。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\}, \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{H}_0 \exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\} \tag{1}$$

ここで、$\boldsymbol{E}_0$ 及び $\boldsymbol{H}_0$ は位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$、時刻 t に依存しない複素定数縦ベクトルである。また、この媒質中では次のマクスウェルの方程式が成り立つ。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2}$$

ここで、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度、$\boldsymbol{D}$ は電束密度である。この媒質の透磁率は真空の透磁率 μ_0 に等しいとし、$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ が満たされるものとする。また、この媒質は z 軸方向の誘電率のみが異なる一軸性結晶であり、$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$ は行列

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

を用いて $\boldsymbol{D} = \tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}$ の関係にある。ここで、誘電率 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ を満たすとする。

[1] 式 (1) の平面波が式 (2) のマクスウェルの方程式を満たすことを用いて、以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0) + \omega^2 \mu_0 \tilde{\varepsilon} \boldsymbol{E}_0 = 0 \tag{4}$$

[2] 式 (4) は、ある行列 $\tilde{X}$ を用いて $\tilde{X}\boldsymbol{E}_0 = 0$ の形に整理できる。この行列 $\tilde{X}$ の具体的な表式を求めよ。ただし、3 次元ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ について成り立つ公式 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ を用いてもよい。

[3] 平面波の波数ベクトルを $\boldsymbol{k} = (0, k\sin\theta, k\cos\theta)^{\mathrm{T}}$ とする（ただし、$0 < \theta < \pi/2$、$k > 0$）。このとき、式 (4) で $\boldsymbol{E}_0$ がゼロベクトル以外の解を持つための k の値は 2 つあり、それぞれ

$$k_1 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1} \tag{5}$$

$$k_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \sin^2\theta + \varepsilon_2 \cos^2\theta}} \tag{6}$$

と表されることを示せ。

[4] 問 [3] の k_1, k_2 それぞれに対応する解 $\boldsymbol{E}_0$ を求めよ。ただし、$|\boldsymbol{E}_0| = E_0$ とせよ。

図 1 に示すように、この一軸性結晶を直方体状に切り出したとする。結晶の z 軸は、側面 A に垂直な向きから角度 θ だけ傾いており、また側面 A は yz 平面に垂直である。この側面 A に大気中から垂直に角周波数 ω の光線が入射したとする。結晶に入射後も光線の波数ベクトルの向きは側面 A に垂直なままとなるため、図 1 は問 [3] と同じ状況設定となる。このとき、結晶に入射した光線は、電場が x 成分のみを持つ光線と、yz 成分のみを持つ光線の 2 つに分かれ、それぞれ異なる方向へ進むという現象が起こる。このとき、結晶表面における光の反射や、結晶中での光の分散の影響は無視する。

[5] 図 1 で結晶中を進む光線のうち、電場が x 成分のみを持つ光線について考える。この光線は、問 [3] で求めた $k = k_1$, $k = k_2$ のいずれの解に対応するか答えよ。また、この光線は結晶入射後も向きを変えずにそのまま直進することを示せ。なお、光線の進む向きはポインティングベクトル $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ で与えられ、波数ベクトルの向きとは必ずしも一致しない。

[6] 図 1 で結晶中を進む光線のうち、電場が yz 成分のみを持つ光線を考える。この光線は、結晶入射後に進む向きが角度 α だけ変化する。$\tan(\theta + \alpha)$ を、$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta$ を用いて表せ。さらに、$\tan\alpha$ を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta$ を用いて表せ。

[7] 図 2 のように、「Q」という文字が印刷された紙がある。図 1 の結晶を、この紙面と側面 A が接触するように設置する。結晶の側面 A に対して反対側から紙に印刷された文字を見た場合、どのように見えるかを図示せよ。また、その理由を図を用いて説明せよ。

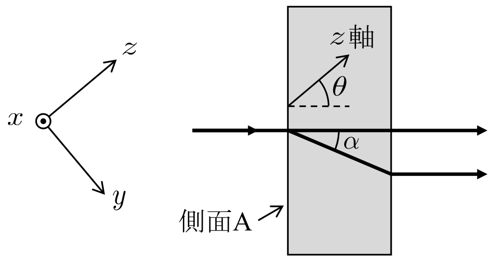

図1

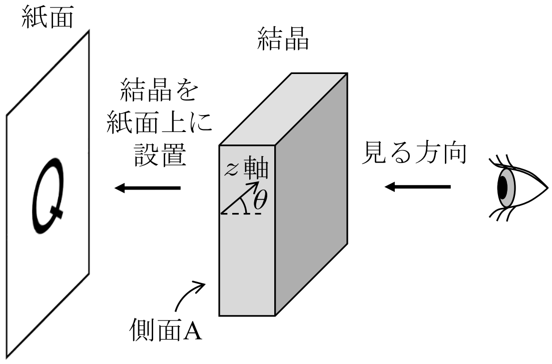

図2

第 3 問

固体表面における原子の吸着現象の簡単なモデルとして、原子が吸着できる場所（吸着サイト）が N_a 個並んだ吸着格子と単原子理想気体が接した系を考える（図 1 を参照)。なお、この系はボルツマン統計に従うものとする。各吸着サイトは互いに独立で、それぞれ原子が吸着していないか、1 つだけ吸着しているかのいずれかの状態をとるものとし、それぞれの状態のエネルギーを 0、$-\varepsilon$ とする ($\varepsilon > 0$)。各原子の質量を m とし、原子の内部自由度は考えない。この系全体は、温度 T、化学ポテンシャル μ の熱平衡状態にあるものとする。ボルツマン定数を k_{B}、逆温度を $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$、プランク定数を 2π で割ったものを $\hbar$ とする。

[1] まず、単原子理想気体のみを考える。体積 V 中の単原子 N 個からなる理想気体の分配関数は

$$Z^{(\mathrm{g})}(V,\beta,N) = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3N/2} \tag{1}$$

で与えられることを示せ。

[2] 式 (1) を用いて、大分配関数 $Z_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{g})}(V,\beta,\mu) = \sum_{N=0}^{\infty} Z^{(\mathrm{g})}(V,\beta,N)e^{\beta\mu N}$ を求めよ。

[3] 理想気体の圧力 P は、$Z_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{g})}$ を用いて $P(\beta,\mu) = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial}{\partial V}\log Z_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{g})}(V,\beta,\mu)$ と与えられる。これに問 [2] の結果を用いることで、$P(\beta,\mu)$ の表式を求めよ。

[4] 次に、この単原子理想気体が吸着格子に接している状況を考える。1 つの吸着サイトに着目し、それがとりうる状態に関する大分配関数 $\xi_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{a})}$ を求めよ。

[5] 吸着格子全体の大分配関数は $Z_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{a})} = (\xi_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{a})})^{N_a}$ で与えられる。これを用いて、吸着している原子の密度 n_a（吸着原子の総数を N_a で割ったもの）を求めよ。

[6] 問 [3] と [5] の結果を用いて、吸着原子密度 n_a を圧力 P と温度 T の関数として表せ。

[7] 問 [6] で得られた n_a を、温度 T 一定のもとで圧力 P の関数として図示せよ。また、圧力 P 一定のもとで温度 T の関数としても図示せよ。

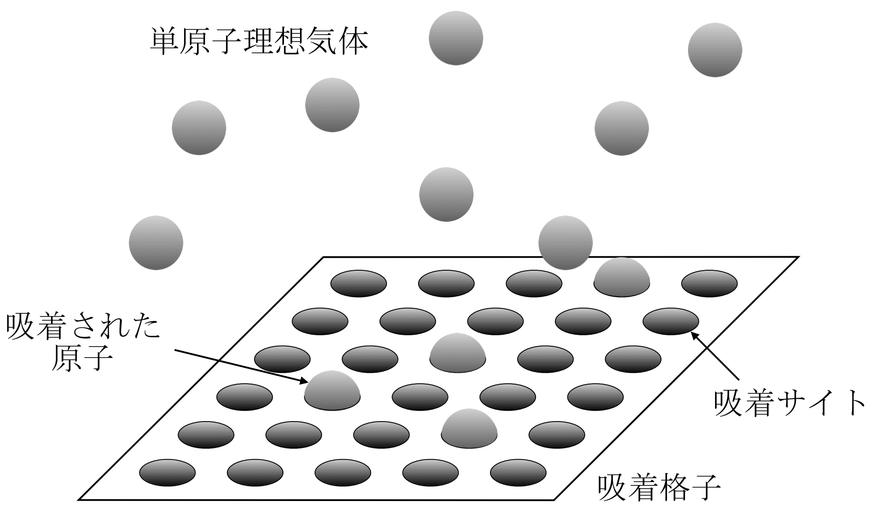

図 1

第 4 問

質量 m の量子力学的粒子がポテンシャル $(1/2)m\omega^2(\hat{x}^2+\hat{y}^2)$ のもとで運動する 2 次元系を考える。ω はポテンシャルの強さを表す正の定数であり、$\hat{x}$（$\hat{y}$）は x 座標（y 座標）の位置演算子である。まず、x 方向と y 方向の運動に分離して考えよう。ポテンシャル $(1/2)m\omega^2\hat{x}^2$ のもとで x 軸上を運動する質量 m の粒子の固有状態を、エネルギーが低い順に $|n\rangle$ とおく（$n=0,1,2,\ldots$）。ここで、演算子

$$\hat{a}_x^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}-\frac{i}{m\omega}\hat{p}_x\right),\quad \hat{a}_x=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}+\frac{i}{m\omega}\hat{p}_x\right) \tag{1}$$

を導入する。$\hat{p}_x$ は運動量の x 成分の演算子であり、$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったものである。このとき、$\hat{a}_x^\dagger$, $\hat{a}_x$, $|n\rangle$ は次の関係式を満たす。

$$[\hat{a}_x,\hat{a}_x^\dagger]=\hat{a}_x\hat{a}_x^\dagger-\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x=1, \tag{2}$$

$$\hat{a}_x^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle,\quad \hat{a}_x|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle\quad (n\neq 0),\quad \hat{a}_x|0\rangle=0 \tag{3}$$

y 方向の運動についても同様の演算子を導入する。

$$\hat{a}_y^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{y}-\frac{i}{m\omega}\hat{p}_y\right),\quad \hat{a}_y=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{y}+\frac{i}{m\omega}\hat{p}_y\right) \tag{4}$$

これらを用いて以下の問に答えよ。問 [9] 以外では粒子のスピンを考えないことにする。

[1] 系の全ハミルトニアン $\hat{H}$ を $\hat{a}_x^\dagger,\hat{a}_x,\hat{a}_y^\dagger,\hat{a}_y$ を用いて表せ。

[2] $\hat{H}$ のエネルギー固有値を求めよ。低い方から N 番目のエネルギー準位（$N=1,2,3,\ldots$）は何重に縮退しているか答えよ。

[3] 角運動量の z 成分 $\hat{l}_z=\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x$ を $\hat{a}_x^\dagger,\hat{a}_x,\hat{a}_y^\dagger,\hat{a}_y$ を用いて表せ。また、角運動量 $\hat{l}_z$ が保存量であることを示せ。

次に、ハミルトニアン $\hat{H}$ と角運動量 $\hat{l}_z$ の同時固有状態を構成することを考える。そのために、演算子 $\hat{b}^\dagger=C\hat{a}_x^\dagger+D\hat{a}_y^\dagger$ と $\hat{b}=C^*\hat{a}_x+D^*\hat{a}_y$ を導入しよう。ここで、C と D は $|C|^2+|D|^2=1$ を満たす複素係数で、C^* と D^* はこれらの共役複素数である。

[4] ある演算子 $\hat{A}$ と実数 α が

$$[\hat{l}_z,\hat{A}]=\alpha\hat{A} \tag{5}$$

を満たすとする。固有値 l_z を持つ角運動量 $\hat{l}_z$ の固有状態を $|l_z\rangle$ とするとき、$\hat{A}|l_z\rangle\neq 0$ であれば、$\hat{A}|l_z\rangle$ は固有値 $l_z+\alpha$ を持つ $\hat{l}_z$ の固有状態になることを示せ。

[5] 演算子 $\hat{A}$ に関する式 (5) の条件を演算子 $\hat{b}^\dagger$ が満たすように、係数 C,D と対応する α を求めよ。ただし、C は負でない実数になるように選べ。$\hat{b}^\dagger,\hat{b}$ は 2 組存在することに注意せよ。以下では、これらを $\hat{b}_1^\dagger,\hat{b}_1$ および $\hat{b}_2^\dagger,\hat{b}_2$ と書くことにする。

[6] 交換関係 $[\hat{b}_1,\hat{b}_1^\dagger],[\hat{b}_2,\hat{b}_2^\dagger],[\hat{b}_1,\hat{b}_2^\dagger],[\hat{b}_2,\hat{b}_1^\dagger]$ を計算せよ。

[7] ハミルトニアン $\hat{H}$ と角運動量 $\hat{l}_z$ を $\hat{b}_1^\dagger,\hat{b}_1,\hat{b}_2^\dagger,\hat{b}_2$ を用いて表せ。

[8] この 2 次元系の N 番目のエネルギー準位（$N=1,2,3,\ldots$）に属する固有状態がとる $\hat{l}_z$ の固有値を全て求めよ。

[9] この系の粒子がスピン 1/2 の電子で、スピン軌道相互作用 $\hat{H}_{\mathrm{so}}=\lambda\hat{l}_z\sigma_z$ が働く場合を考える。λ はスピン軌道相互作用の大きさを表し、$\sigma_z=\pm1$ はスピンの z 成分に対応する。このとき、系のエネルギー準位を求めよ。