

物理工学専攻 入学試験問題

物理学

(4問出題, 4問解答)

2023年8月29日(火) 9:00~13:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 出題された4問とも解答すること。
4. 答案用紙が4枚渡されるから, 1題ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙上方の指定された箇所に, その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 下書用紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号, 符号などを記入した答案は無効とする。
8. 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

不均一磁場中の磁性体は力を受ける。この現象を利用して、試料の磁気モーメントを測定する磁力計を設計する。図1のように、半径 a 、長さ l_0 、質量 M の密度が一様な円柱状の変形しない棒を考える。棒の中心軸上かつ片方の先端を P とし、 P から距離 l_1 ($> l_0/2$) 離れた中心軸上の点を O とする。 $+z$ 方向を鉛直上方として、 x, y, z 軸を図1のように設定する。棒は、 O を通り y 軸に平行な直線を軸に回転運動できるとし、図1のように、鉛直下方向から測定した棒の傾き角を θ とする。空気抵抗や O での摩擦は無視する。以下の問いに答えよ。

[1] まず、棒の慣性モーメントを求めよ。

[1.1] 棒の中心軸に関する慣性モーメント I_{\parallel} を求めよ。

[1.2] 棒を中心軸に垂直に切った、厚さ Δl の十分に薄い円板を考える。この円板の重心を通り、棒の中心軸に垂直な直線に関する慣性モーメント ΔI_{\perp} を求めよ。

[1.3] 図1において、 O を通り y 軸に平行な直線に関する棒の慣性モーメント I_O を求めよ。必要であれば、質量 M' の物体の直線 α, β に関する慣性モーメント I_{α}, I_{β} の間には、 $I_{\beta} = I_{\alpha} + M'R^2$ が成り立つことを用いてよい。ただし、 α は重心を通り、 β は α に平行かつ距離 R だけ離れているとする。

[2] 点 P に x 方向の一定の力 F_1 (> 0) が加えられ、棒が $\theta = \theta_0$ ($|\theta_0| < \pi/2$) で静止している状態を考える。以下の問いに答えよ。ただし、棒の慣性モーメントとして I_O を用いてよい。

[2.1] $\tan \theta_0$ を求めよ。ただし、重力加速度を g とする。

[2.2] 点 P に加わる力を瞬時に取り除くと、棒は運動を始める。 $\theta = 0$ における角速度の大きさを求めよ。ただし、 θ_0 を用いてよい。

[2.3] θ_0 が十分小さいとき、この運動の周期を求めよ。

[3] 次に、この棒を用いて磁性体試料の磁気モーメントを測定する。棒は非磁性であるとする。図2のように、試料を P につける。試料の大きさや質量は無視する。 O から十分下に置いた電磁石によって、勾配を持った x 方向の静磁場 H を試料周辺にかけ、試料の磁気モーメント m が磁場と平行に向いたとする。このとき、試料に対して x 方向に働く力 F_1 は、

$$F_1 = m \frac{\partial H}{\partial x}$$

と表せる。ただし $F_1 > 0$ とする。

棒の上端に x 方向の力 F_2 (> 0) を加え、 $\theta = 0$ を保つ。そのために、円柱型の質量の無視できる半径 b 、透磁率 μ の鉄芯を棒の上端に取り付ける。さらに、導線が一様に巻かれた単位長さあたりの巻数 N 、長さ X のソレノイドを、鉄芯の周りを隙間なく囲むように置く。鉄芯はソレノイドの中を摩擦なく自由に動けるものとする。 a, b は l_0, l_1 に比べて十分小さいとして、以下の問いに答えよ。

[3.1] 鉄芯がない場合、導線に定常電流 I を流したときのソレノイド内部の磁場の大きさを求めよ。ただし、 X は十分長く、磁場はソレノイドに平行かつ一様であるとしてよい。

[3.2] 鉄芯が長さ $X/3$ だけソレノイドに挿入された状態にする。ソレノイドのインダクタンス L を求めよ。ただし、 μ は真空透磁率 μ_0 よりも十分大きく、鉄芯が入っていない部分の磁束やインダクタンスは無視できるとする。

- [3.3] 鉄芯がソレノイド内部に引き込まれる力 F_2 を通して F_1 を測定する。 F_1 を μ, N, b, I, l_0, l_1 を用いて表せ。ただし、 F_2 はソレノイド外部の磁場を 0 として $F_2 = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L}{\partial \xi}$ と表せることを用いてよい。ここで ξ は鉄芯がソレノイドに挿入されている長さである。
- [3.4] 棒の形状は $l_0 = 140$ cm, $l_1 = 90$ cm である。また、ソレノイドは、半径 $b = 1.5$ cm、単位長さあたりの巻数 $N = 2000$ m⁻¹ である。鉄芯は、透磁率 $\mu = 6.4 \times 10^{-3}$ N·A⁻² である。試料付近の磁場勾配は 1600 Oe·cm⁻¹ である。このとき、 $\theta = 0$ とするのに必要な電流は $I = 200$ mA であった。したがって、このときの試料の磁気モーメントは Wb·m である。 内の数を有効数字二桁で答えよ。ただし、Oe は CGS 単位系であり、MKSA 単位系に変換するには $1 \text{ Oe} \rightarrow \frac{10^3}{4\pi} \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ とする。また、Wb は $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ である。

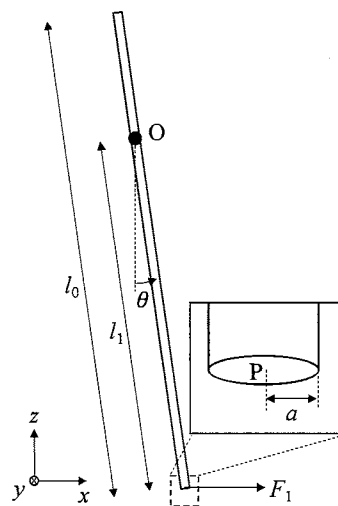


図 1

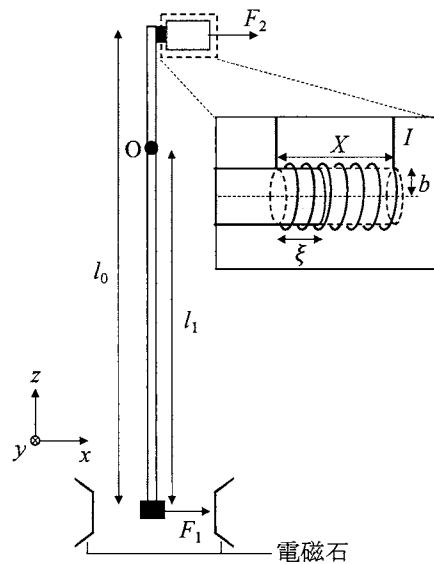


図 2

第2問

図1のように、真空中で、厚さを無視できる2枚の平面鏡（鏡1、鏡2）が z 軸に対して垂直に置かれている。鏡1、鏡2の向かい合う面の振幅反射係数をそれぞれ r_1, r_2 とする。鏡1と鏡2の間で、単一角周波数で振動する直線偏光かつ平面波の電磁波が z 軸に沿って往復し定在波を形成している。定在波の腹の位置における電場振幅を E_0 とする。また、2枚の鏡の間隔は電磁波の波長よりも十分に長い。電磁波が鏡に照射される面積は平面波の近似が成立する程度に大きく、鏡の面積よりも十分に小さいものとする。

真空の誘電率、真空の透磁率、真空中の光速はそれぞれ ϵ_0, μ_0, c である。

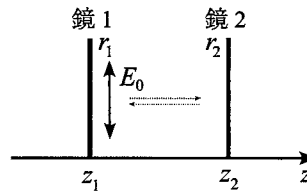


図1

- [1] 鏡1、鏡2はともに完全導体であり、このときの振幅反射係数は -1 ($r_1 = r_2 = -1$)である。鏡1、鏡2の位置がそれぞれ $z_1 = -\frac{L}{2}, z_2 = \frac{L}{2}$ ($L > 0$)に固定されている。以下の問いに答えよ。
- [1.1] 鏡1と鏡2の間の空間では、正の整数 n で指定できる離散的な角周波数の電磁波のみ存在することができる。この角周波数 ω_n を求めよ。
- [1.2] 複素数表示を用いて鏡1と鏡2の間の位置 z 、時刻 t における定在波の電場と磁束密度をそれぞれ $E_n(z, t) = \text{Re}[\tilde{E}_n(z)e^{-i\omega_n t}]$, $B_n(z, t) = \text{Re}[\tilde{B}_n(z)e^{-i\omega_n t}]$ と書いたとき、 $\tilde{E}_n(z)$, $\tilde{B}_n(z)$ を、 E_0 を用いて表せ。ここで、 i は虚数単位である。
- [1.3] 1周期分の時間平均を $\langle \dots \rangle$ と表記するとき、電磁波の運動量密度の時間平均 $\langle g \rangle$ は、ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の時間平均 $\langle \mathbf{S} \rangle$ を用いて、

$$\langle g \rangle = \frac{1}{c^2} \langle \mathbf{S} \rangle \quad (1)$$

と表される。鏡1と鏡2の間にある電磁波の反射によって鏡2にはたらく圧力 P を、 E_0 を用いて表せ。なお、電場ベクトル \mathbf{E} 、磁場ベクトル \mathbf{H} は、それらの複素数表示 $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ を用いて、 $\mathbf{E} = \text{Re}[\tilde{\mathbf{E}}]$, $\mathbf{H} = \text{Re}[\tilde{\mathbf{H}}]$ である。また、 $\langle \mathbf{S} \rangle$ は次のように表される。

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*]. \quad (2)$$

ここで、 $*$ は複素共役を表す。

- [2] 図2のように、壁に固定されたばね定数 k のばねに鏡2を接続する。鏡2の位置が $z_2 = \frac{L}{2}$ ($L > 0$) のとき、ばねの長さは自然長である。鏡1、鏡2はともに完全導体であり振幅反射係数を -1 ($r_1 = r_2 = -1$) とし、鏡1の位置を $z_1 = -\frac{L}{2}$ に固定する。鏡2は z 軸に沿って移動できる。定在波の腹の位置における電場振幅が E_0 、鏡2の位置が $z_2 = \frac{L}{2} + \delta$ のとき、鏡2は動かさず定常状態になった。鏡2において電磁波が照射されている面積を A とするとき、 δ の符号を示し、その大きさを E_0 を用いて表せ。

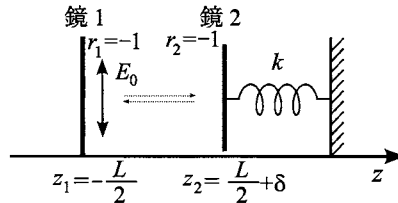


図 2

- [3] 図3のように、鏡1の振幅反射係数を $r_1 = -r$ ($\frac{1}{2} < r < 1$) とし、鏡1の位置を以下で指定するように固定する。鏡2は完全導体で振幅反射係数は $r_2 = -1$ である。前問と同様に、鏡2にはばねが取り付けられ z 軸に沿って移動できる。 $+z$ 方向に伝播する角周波数 ω 、電場振幅 E_1 の平面電磁波を鏡1の裏側から入射する。このときの鏡1の振幅透過係数は $\sqrt{1-r^2}$ である。以下の問いに答えよ。

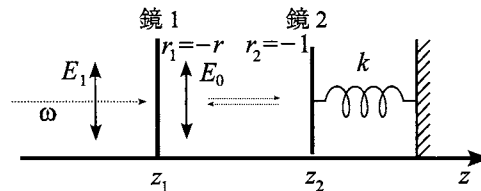


図 3

- [3.1] 鏡1を $z_1 = -\frac{L}{2}$ ($L > 0$) に、鏡2を $z_2 = \frac{L}{2}$ に固定する。定常状態において、定在波の腹の位置における電場振幅 E_0 を E_1 を用いて表せ。
- [3.2] 鏡2を $z_2 = \frac{L}{2}$ に固定する。 ω を適当に選んだところ、鏡1の位置 z_1 を変化させると、 $z_1 = -\frac{L}{2}$ において $\frac{E_0}{E_1}$ が極大値をとり、 $z_1 = -\frac{L}{2} \pm \Delta$ ($0 < \Delta < \frac{\pi c}{2\omega}$) において $\frac{E_0}{E_1}$ が極大値の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ になった。このときの Δ を求めよ。ただし、逆三角関数を用いてよい。
- [3.3] 前問の状況で、鏡1の位置を (a) $z_1 = -\frac{L}{2}$ 、(b) $z_1 = -\frac{L}{2} + \Delta$ 、(c) $z_1 = -\frac{L}{2} - \Delta$ のいずれかに固定し、鏡2の固定を外して平衡点 ($z_2 = \frac{L}{2} + \delta$) 近傍で小振幅の自由振動をさせた。その際の実効的なばね定数が k よりも大きくなるのは、(a)、(b)、(c) のいずれであるか答えよ。また、その理由を定性的に述べよ。ただし、 δ は $|\delta| \ll \Delta$ を満たし、また、 E_0 は系の変化に対して即座に追従するものとする。

第3問

プランク定数を 2π で割ったものを \hbar 、ボルツマン定数を k_B として、固体中の格子比熱（単位質量あたりの熱容量）に関する以下の問いに答えよ。

- [1] はじめに、質量 m 、固有角周波数 ω をもつ $M (\gg 1)$ 個の独立な古典的 1 次元調和振動子系について考えよう。1 個の調和振動子のハミルトニアンは、位置 x と運動量 p を用いて

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (1)$$

で与えられる。

- [1.1] 温度 T における分配関数 $Z(T) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \int dx dp e^{-\beta H} \right)^M$ を求めよ。ここで $\beta = 1/(k_B T)$ は逆温度である。なお、公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ を用いてよい。

- [1.2] 内部エネルギー U を求めよ。

- [1.3] 熱容量 C を求めよ。

- [2] 次に、固有角周波数 ω をもつ $M (\gg 1)$ 個の独立な量子的 1 次元調和振動子系について考えよう。1 個の調和振動子の固有エネルギーは

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

で与えられる。 n は非負の整数である。

- [2.1] 温度 T における分配関数 $Z(T)$ を求めよ。

- [2.2] 内部エネルギー U を求めよ。

- [2.3] 熱容量 C を求めよ。

- [2.4] 熱容量 C を T の関数としたとき、低温における温度依存性を簡単な式で表せ。また、高温における漸近値を求めよ。さらに、その概形を図示せよ。

- [3] 3 次元固体中の原子の格子振動による比熱について考えよう。格子振動を独立な量子的調和振動子（固有振動モード）の集まりとして考え、固有角周波数が ω と $\omega + d\omega$ の間にある固有振動モードの数 $g(\omega)d\omega$ が

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{9N}{\omega_D^3} \omega^2 & (\omega \leq \omega_D) \\ 0 & (\omega > \omega_D) \end{cases} \quad (3)$$

で与えられるとしよう。ここで ω_D はデバイ振動数であり、 $N (\gg 1)$ は原子数である。

- [3.1] 内部エネルギー U および熱容量 C を、角周波数 ω についての積分の形で書き下せ。

- [3.2] 熱容量 C を温度 T の関数としたとき、低温における温度依存性を T の最低次で求めよ。

積分の実行にあたり $\int_0^{\infty} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \frac{4\pi^4}{15}$ を用いてよい。また、高温における C の漸近値を求めよ。さらに、その概形を図示せよ。

[4] $N(\gg 1)$ 個の原子を含む 3 次元固体中の振動モードの数はおよそ $3N$ である。(i) 単一の固有角周波数 ω をもつ $3N$ 個の古典的 1 次元調和振動子系の熱容量 C_I 、(ii) 単一の固有角周波数 ω をもつ $3N$ 個の量子的 1 次元調和振動子系の熱容量 C_{II} 、(iii) [3] で求めた熱容量 C_{III} 、を比較して考えてみよう。

[4.1] C_I, C_{II}, C_{III} を温度 T の関数として、一つのグラフにプロットせよ。

[4.2] C_I, C_{II}, C_{III} の高温での振る舞いを比較して論ぜよ。特に、それらの類似点について物理的な理由を説明せよ。

[4.3] C_I, C_{II}, C_{III} の低温での振る舞いを比較して論ぜよ。特に、それらの相違点について物理的な理由を説明せよ。

第4問

単一光モードに二次の非線形光学効果が加わった量子光学系を考える。 \hbar をプランク定数を 2π で割ったもの、光モードの角周波数を $\omega(>0)$ 、 \hat{a}^\dagger, \hat{a} をそれぞれ光子の生成・消滅演算子とすると、系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\Delta}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}) \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $\Delta(\geq 0)$ は非線形光学効果の強さを表すパラメーターである。また、 \hat{a}^\dagger は \hat{a} のエルミート共役であり、交換関係

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1 \quad (2)$$

を満たす。 i を虚数単位とすると、生成・消滅演算子から二つの観測量

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (3)$$

を定義できる。

- [1] 非線形光学効果がない ($\Delta = 0$) 場合、ハミルトニアン

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (4)$$

の基底状態は光子のない真空状態 $|0\rangle$ であり、 $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす。

- [1.1] 式 (2) と (3) を用いて、交換子 $[\hat{x}, \hat{p}]$ を求めよ。

- [1.2] $\hat{a}|0\rangle = 0$ を用いて、真空状態 $|0\rangle$ の観測量 \hat{x} と \hat{p} の分散 σ_x^2, σ_p^2 ($\sigma_O = \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2}$, $\langle \dots \rangle = \langle 0 | \dots | 0 \rangle$, $\hat{O} = \hat{x}, \hat{p}$) を求めよ。また、標準偏差の積 $\sigma_x \sigma_p$ を計算し、不確定性関係 $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|$ を確かめよ。

- [2] 次に、非線形光学効果がある一般的な場合 ($\Delta > 0$) を考える。系の基底状態を調べるには以下のユニタリー変換が有用である：

r を実パラメーターとして、ユニタリー演算子 $\hat{S}(r) = e^{\frac{r}{2}(\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger)}$ は \hat{a}, \hat{a}^\dagger を

$$\hat{S}(r)^\dagger \hat{a} \hat{S}(r) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r, \quad \hat{S}(r)^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S}(r) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} \sinh r \quad (5)$$

のように変換する。

$\hat{H}(r) = \hat{S}(r)^\dagger \hat{H} \hat{S}(r)$ とすると、式 (5) は \hat{a}^\dagger, \hat{a} についての線形変換であるため、 $\hat{H}(r)$ は

$$\hat{H}(r) = \hbar\omega(r)\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\Delta(r)}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}) + E(r) \quad (6)$$

の形になる。

- [2.1] 式 (5) を用いて、式 (6) の $\omega(r), \Delta(r), E(r)$ の表式を求めよ。

- [2.2] $\omega > \Delta$ を仮定すれば、特定のパラメーター r に対して式 (1) の基底状態が $\hat{S}(r)|0\rangle$ になる。この r を ω, Δ で表せ。また、係数 c_{2n} を用いて基底状態が $\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(\hat{a}^\dagger)^{2n}|0\rangle$ のような偶数個光子成分のみを持つ状態を表せる理由を定性的に説明せよ。

- [2.3] $\omega > \Delta$ を仮定し、式 (1) の基底状態に対して、観測量 \hat{x} と \hat{p} の分散 σ_x^2, σ_p^2 を ω, Δ で表せ。また、問 [1.2] における真空状態の結果と比較し、不確定性関係を確かめよ。

- [3] 最後に、初期状態を真空状態 $|0\rangle$ とし、非線形光学効果がある一般的な場合の時間発展を考える。ハミルトニアンが式 (1) のような \hat{a}, \hat{a}^\dagger の二次形式であれば、 \hat{a}, \hat{a}^\dagger のハイゼンベルク方程式

$$\frac{d}{dt}\hat{O}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}(t)], \quad \hat{O}(0) = \hat{O}, \quad \hat{O} = \hat{a}^\dagger, \hat{a} \quad (7)$$

は線形微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{a}^\dagger(t) \end{bmatrix} = -iM \begin{bmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{a}^\dagger(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

になる。ただし、 M は 2×2 定数行列である。

- [3.1] 式 (1) のハミルトニアンに対応する行列 M を求めよ。必要であれば、演算子 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ に対して $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]$ が成り立つことを用いてよい。
- [3.2] M の固有値を求めよ。また、 $\omega < \Delta$ と $\omega > \Delta$ それぞれのパラメータ領域において、系の安定性を議論せよ。
- [3.3] $\omega = \Delta$ の臨界点において、時刻 t における光子数 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の期待値を求めよ。必要であれば、 $A^2 = 0$ を満たす行列 A に対して $e^A = I + A$ が成り立つことを用いてよい。ここで、 I は単位行列である。