

物理工学専攻 入学試験問題

物理学 I

(2問出題, 2問解答)

平成25年8月27日(火) 9:30~11:30

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 出題された2問とも解答すること。
4. 答案用紙が2枚渡されるから, 1題ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙上方の指定された箇所に, その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号, 符号などを記入した答案は無効とする。
8. 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

質量 m_1 で位置 r_1 にある質点1と、質量 m_2 で位置 r_2 にある質点2が、 $r_2 - r_1$ に依存する相互作用ポテンシャル $U(r_2 - r_1)$ の下で運動する2体問題を考える。このときラグランジアンは、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 - U(r_2 - r_1) \quad (1)$$

で与えられる。ここで、時刻を t として、一般の変数 x に対して、 $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ 、 $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ とする。

[1] この系のラグランジアンは、重心座標 $R = \frac{m_1r_1 + m_2r_2}{m_1 + m_2}$ と相対座標 $r = r_2 - r_1$ を使って

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U(r) \quad (2)$$

となることを示し、 M と μ を m_1 と m_2 を使って書け。

式(2)より、上記の2つの質点の運動が、等速直線運動する質量 M の質点の運動（重心運動）とポテンシャル $U(r)$ の下で運動する質量 μ の質点の運動（相対運動）という2つの独立な運動に分離できた。今後は、

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - U(r) \quad (3)$$

というラグランジアンで決定される相対運動にのみ注目する。

以下、ポテンシャル $U(r)$ が球対称、すなわち $|r| = r$ のみに依存する、とする。この時、運動はある平面上で起こる。その平面を xy 平面として、質点の位置座標を $r = (r \cos \phi, r \sin \phi, 0)$ とする。

[2] このとき、式(3)のラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r) \quad (4)$$

と書けることを示せ。

[3] 式(4)のラグランジアン L を用いて、 ϕ に関するラグランジュの運動方程式より、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\phi}) = 0 \quad (5)$$

が得られる。ここから、角運動量の大きさ $l = \mu r^2 \dot{\phi}$ が保存量であることが分かる。

この保存量 l を使うと、 r に関するラグランジュの運動方程式から、

$$\mu\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left(U(r) + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} \right) \quad (6)$$

となることを示せ。また、この運動方程式の物理的な意味を説明せよ。

[4] 式(6)の両辺に \dot{r} をかけることで、エネルギー $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2}$ が保存することを導け。

[5] 以上より、式 (3) のラグランジアン L から導かれる運動において、角運動量ベクトル $l = r \times \mu \dot{r} = (0, 0, l)$ とエネルギー $E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r) + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2}$ が保存することが分かった。

さらに、ポテンシャルが $U(r) = -\frac{k}{r}$ の場合 (k は正の定数)、次のラプラス・ルンゲ・レンツベクトル

$$A = \mu \dot{r} \times l - \mu k \frac{r}{r} \quad (7)$$

も保存量となる。 A が角運動量ベクトル l と垂直であることを示せ。

また、 A と r がなす角を α として $A \cdot r = A r \cos \alpha$ を計算することで、軌道の式が、

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left(1 + \frac{A}{\mu k} \cos \alpha \right) \quad (8)$$

と書けることを導け。ただし $A = |A|$ である。

第2問

真空の誘電率を ϵ_0 、真空の透磁率を μ_0 として以下の問いに答えよ。解答の際は途中計算も記せ。

[1] 電流が作る磁場を考える。

[1.1] はじめに図1のように、 xy 平面で原点を中心として半径 a で大きさ I の円環電流が流れているとき、 z 軸上の点 $(0, 0, z)$ における磁束密度の大きさと向きを求めよ。

[1.2] 図2のように半径 a 、長さ l 、巻数 N のソレノイドが、その中心を原点とし z 軸に沿って置かれている。このソレノイドに大きさ I の電流が流れているとき、原点における磁束密度の大きさを求めよ。

[1.3] 設問 [1.2] において、 $l \gg a$ としたとき、このソレノイドの自己インダクタンス L を求めよ。ここで、磁束密度はソレノイド内部のいたるところで一様であり、ソレノイド中心の磁束密度と同じであるとする。

[2] 図3のような、半径 b 、間隔 $d (\ll b)$ の平行導体円板対からなるコンデンサーを考える。このコンデンサーに交流電圧 $v(t) = v_0 \sin \omega t$ (v_0 、 ω はそれぞれ交流電圧の振幅と角周波数) を加えたとき、円板間に生じる電場及び磁場を時間 t の関数として表せ。ここで、両円板の中心軸からとった距離を $r (< b)$ として、解答せよ。また、磁場の方向も示せ。

[3] 図4のように、設問 [1.3] と [2] で用いたソレノイドとコンデンサー (キャパシタンス C) を含む回路を考える。スイッチを S_1 に接続して、コンデンサーに直流電圧 V を加え、電流計の値がゼロになるまで待ったのち、スイッチを S_2 に接続した (初期状態)。以下の問いに答えよ。なお、回路の抵抗は無視出来るものとする。また、コンデンサーとソレノイドは十分に離れているとする。

[3.1] ある時刻 ($t = 0$ とする) でスイッチを S_3 に接続してコンデンサーとソレノイドを接続した。その後の回路を流れる電流の時間変化を回路の方程式を立てて定量的に説明せよ。

[3.2] 設問 [3.1] の状況において、コンデンサーとソレノイドに蓄えられるエネルギーの時間 t 依存性を同一の図内に図示し、その物理的な意味を述べよ。

[3.3] 初期状態形成後、コンデンサーの極板間距離を $2d$ まで引き伸ばした。その後、 $t = 0$ でスイッチを S_3 に接続した。設問 [3.2] で描いた図と同様の図を描いた場合、本設問での結果と設問 [3.2] の結果に定量的に異なる点があればそれを明記し、それらの違いはなぜ生じるか答えよ。

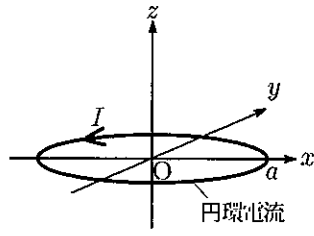


図 1

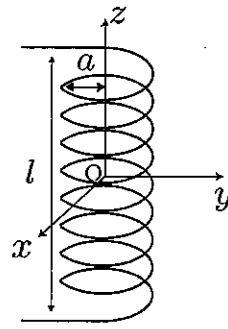


図 2

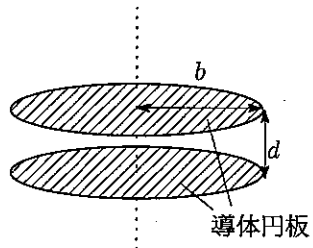


図 3

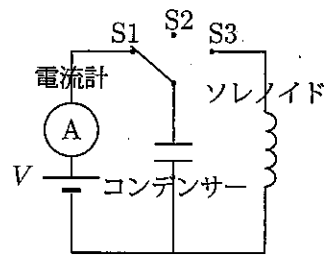


図 4

物理工学専攻 入学試験問題

物理学Ⅱ

(4問出題, 3問解答)

平成25年8月27日(火) 13:00~16:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 出題された4問のうちから3問を選び解答すること。
4. 答案用紙が3枚渡されるから, 1題ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙上方の指定された箇所に, その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号, 符号などを記入した答案は無効とする。
8. 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

電場下では運動する電子に対して次の式で表されるスピン軌道相互作用が働く。

$$H_{SO} = \frac{\gamma}{\hbar} (\mathbf{p} \times \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

ここで $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ は運動量、 γ は負の定数、 \hbar はプランク定数を 2π で割ったもの、 \mathbf{E} は電場、 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ はパウリ行列を表す。上式は電子がスピン軌道相互作用のために有効磁場 $\mathbf{B}_{SO} = a(\mathbf{p} \times \mathbf{E})$ (a は負の定数) を受けることを意味する。

[1] z 方向の上向きスピン、下向きスピンを基底とする行列表現では $\boldsymbol{\sigma}$ の各成分は

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。 σ_z の固有値 $+1$ 、 -1 に対する固有状態 α 、 β は

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で表される。 α 、 β を基底として σ_x 、 σ_y の固有値と固有関数を求めよ。

[2] x 軸上を1次元的に運動する電子に、 z 方向の一様な静電場 $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ ($E > 0$) が加わった場合を考える。

[2.1] ハミルトニアンは以下のように書けることを示せ。なお電場によるスピン軌道相互作用以外の効果は無視するものとする。

$$H = \frac{p_x^2}{2m} - \left(\frac{\gamma E}{\hbar} \right) p_x \sigma_y$$

ここで m は電子の質量を表す。

[2.2] 固有関数 ψ が軌道関数 $\phi(x)$ 、スピン波動関数 χ を用いて $\psi = \phi(x)\chi$ と表されることを利用してハミルトニアンの固有エネルギーと固有関数を求めよ。軌道関数には平面波 $\phi(x) = e^{ikx}$ (k は波数) を用いよ。求めた固有エネルギーの分散曲線 (エネルギーと k の関係) を図示せよ。また分散曲線上で、電子のスピンの向きが波数 k に依存してどのように変化するか説明せよ。

[2.3] 静電場 \mathbf{E} に加えて、さらに x 方向の一様な静磁場 $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$ ($B > 0$) を加えると、電子は次のような磁気的な相互作用 (ゼーマン効果) を受ける。

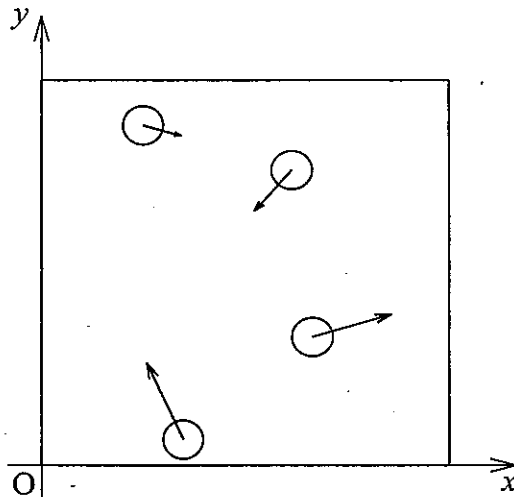
$$H_Z = \frac{1}{2} g \mu_B \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

ここで $g (> 0)$ はランダウの g 因子、 μ_B はボーア磁子を表す。この電子に対するハミルトニアンを書き、対角化することにより固有エネルギーを求めよ。なお電場によるスピン軌道相互作用以外の効果は無視してよい。また、求めた固有エネルギーの分散曲線の概略を図示せよ。この分散曲線上でスピンの向きが波数 k に依存してどのように変わるか説明せよ。

第2問

質量 m の剛体円盤粒子 N 個が正方形の容器の中で摩擦なく運動を続け、完全弾性衝突を繰り返している 2次元系を考える。 N は 2 以上の整数とする。容器の壁と粒子との衝突も完全弾性衝突とする。粒子の回転は無視して良い。容器は固定されており、粒子が容器の壁と衝突しても容器は動かないものとする。また系の全運動エネルギーを E とする。 $E > 0$ である。

容器の 1 つの辺に平行に x 軸、もう一方に平行に y 軸をとった座標系をとる。 N 個の粒子は 1 から N までの番号で区別されるものとする。粒子 k ($1 \leq k \leq N$) の速度を $v_k = (v_{x,k}, v_{y,k})$ と書き表す (下図参照)。



粒子同士の衝突の平均時間間隔よりも十分に長い時間にわたって観察すると、全系はミクロカノニカル分布に従う。ミクロカノニカル分布から出発して、カノニカル分布を導くことを考える。

まず粒子数 $N = 2$ の場合を考える。

- [1] 粒子の速度の 4 成分を $(v_{x,1}, v_{y,1}, v_{x,2}, v_{y,2})$ と並べて作った 4 次元空間中でのミクロカノニカル分布は、原点を中心とした 4 次元球の表面上に一様に分布したものであることを説明せよ。この 4 次元球の半径 R も示せ。

設問 [1] で考えた 4 次元球を一般化して d 次元空間中の球について考える。 d を 2 以上の整数とし、 d 次元空間中で任意に決めた点からの距離が一定値 $r (> 0)$ 以下である点の集合を半径 r の d 次元球と呼ぶ。 d 次元球の表面の大きさ (2 次元であれば円周の長さ、3 次元であれば球面の面積、4 次元であれば体積) を $S_d(r)$ とする。

- [2] $d = 2, 3, 4$ の場合、 $S_d(r)$ は以下の定積分として書き表されることを示せ：

$$S_2(r) = \int_{-r}^r dq_1 \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2}}$$

$$S_3(r) = \int_{-r}^r dq_1 \int_{-\sqrt{r^2 - q_1^2}}^{\sqrt{r^2 - q_1^2}} dq_2 \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2}}$$

$$S_4(r) = \int_{-r}^r dq_1 \int_{-\sqrt{r^2 - q_1^2}}^{\sqrt{r^2 - q_1^2}} dq_2 \int_{-\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2}}^{\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2}} dq_3 \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}}$$

- [3] 設問 [1] で扱った $N = 2$ のミクロカノニカル分布から、粒子 1 の速さ $v_1 = |v_1|$ の分布関数 $P(v_1)$ を考える。すなわち、粒子 1 の速さが v_1 以上 $v_1 + dv_1$ 以下の微小区間に入っている確率が $P(v_1)dv_1$ となる。

設問 [1] で求めた半径 R よりも大きい v_1 を持つ状態はこの系のミクロカノニカル分布には現れないことから、 $v_1 > R$ の場合は $P(v_1) = 0$ であることが分かる。

$v_1 < R$ である v_1 の場合、 $P(v_1)dv_1$ はミクロカノニカル分布関数の v_1 から $v_1 + dv_1$ の微小区間にある部分の大きさに比例する。

$P(v_1)$ を求めよ。求める分布関数は規格化しなくともよい。

次に一般の粒子数 N の場合を考える。 d 次元球の表面の大きさ $S_d(r)$ は $(d-1)$ 個の変数 q_1, q_2, \dots, q_{d-1} に関する以下の $(d-1)$ 重の定積分で表される：

$$S_d(r) = \int_{-r}^r dq_1 \int_{-\sqrt{r^2 - q_1^2}}^{\sqrt{r^2 - q_1^2}} dq_2 \int_{-\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2}}^{\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2}} dq_3 \cdots \int_{-\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2 - \cdots - q_{d-2}^2}}^{\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2 - \cdots - q_{d-2}^2}} dq_{d-1} \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2 - \cdots - q_{d-1}^2}}$$

- [4] 系の全運動エネルギー E を $N\varepsilon$ とする。 $\varepsilon > 0$ は 1 粒子当たりの平均運動エネルギーである。速度のミクロカノニカル分布関数から粒子 1 の速さ $v_1 = |v_1|$ だけを指定した場合の分布関数を、設問 [3] と同様にして導け。求める分布関数は規格化しなくともよい。

- [5] 設問 [4] で求めた 1 粒子の速さ v_1 の分布関数で、 $N \rightarrow \infty$ の極限をとるとマクスウェル速度分布関数となることを示せ。求める分布関数は規格化しなくともよい。

必要があれば以下の公式を使ってよい：

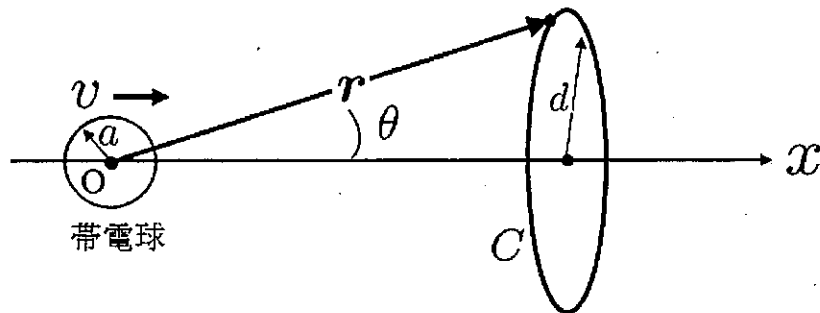
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{N}\right)^N = e^a$$

- [6] 設問 [5] の結果から、この系の温度 T を ε の関数として求めよ。ただしボルツマン定数を k_B とする。

第3問

半径 a 、質量 m_0 の微小球があり、その表面を、表面電荷密度 σ で一様に帯電させた。この球は光速よりは十分遅い等速度 v で x 軸上を正方向に運動している。このとき電場は、 $v=0$ のときの球対称な形のまま微小球とともに速度 v で移動するものとする。この運動空間は真空中で、外部から電場はかけていないものとする。また、このとき、電荷による自己エネルギーは無視する。

- [1] 時刻 t における微小球の中心位置を原点 O とする。この時刻 t での位置 r における電束密度の大きさ $D(r, t) = |D(r, t)|$ を a 、 σ 、 $r = |r|$ を用いて示せ。ただし、 $a < r$ とする。
- [2] 位置 r での磁場を $H(r, t)$ とすると、 D と H の関係を示せ。
- [3] 図のように任意の位置 r を通り、中心が x 軸上にある半径 d の円 C を考える。円 C は x 軸に垂直とする。このとき、運動する微小球による磁場 H は円 C の円周に沿って生じる。磁場 H を円 C の円周に沿って積分した値を、電束密度 D の積分形で示せ。
- [4] 時刻 t から微小時間 Δt が経過したとき、円 C を貫く電束の変化量 $\Delta \Psi$ を求める。 x 軸と r のなす角を θ としたとき、 $\Delta \Psi$ を a 、 σ 、 r 、 v 、 θ 、 Δt を用いて示せ。
- [5] 設問 [3] 及び [4] の結果を用いて、 $H = |H(r, t)|$ を、 a 、 v 、 r 、 θ 、 σ を用いて表せ。
- [6] 磁場 H によるエネルギー密度を $u(r, t)$ とすると、 $u(r, t)$ は H でどのように表すことができるか。ただし、真空の透磁率を μ_0 とする。
- [7] 設問 [6] で求めた $u(r, t)$ を、球 (半径 a) の外での全空間で積分を行うことにより、この球の運動に伴う磁気エネルギーを求めよ。
- [8] 設問 [7] の結果から、この微小球の運動に伴うエネルギー (運動エネルギー+磁気エネルギー) を求めよ。この結果から、この微小帯電球は質量 m_0 より重くなっていると見なせる。その物理的意味について 100~200 字程度で説明せよ。



第4問

図1のような (a)3次元立方格子を持つ系、(b)2次元正方格子を持つ系、のフォノン定積比熱 C_V を考える。

フォノンは低周波数領域では線形分散を持つ。
すなわち、 ω が十分小さい領域においては、

$$(a) \text{ 3次元立方格子系に対しては } \omega = v k_{xyz} \quad \left(k_{xyz} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right)$$

$$(b) \text{ 2次元正方格子系に対しては } \omega = v k_{xy} \quad \left(k_{xy} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \right)$$

である。 $(\omega$ は角周波数、 k_x, k_y, k_z は波数ベクトルの x, y, z 成分、 v は音速)

- [1] フォノンの状態密度を $D(\omega)$ とする、すなわち $\omega \sim \omega + d\omega$ の角周波数を持つフォノンの状態数が $D(\omega)d\omega$ で与えられる。上記のような線形分散関係が成立する低周波数領域においては $D(\omega) \propto \omega^p$ となるが、(a)3次元立方格子系、(b)2次元正方格子系のそれぞれに対し、 p の値を導出せよ。導出過程も示すこと。
- [2] 低温極限での C_V の温度依存性は $C_V \propto T^q$ (T は絶対温度) となるが、(a)3次元立方格子系、(b)2次元正方格子系のそれぞれに対し q の値を導出せよ。導出過程も示すこと。

次に、図2のような、面内で強く結合し、面間は非常に弱く結合した層状構造を持つ系のフォノン定積比熱 C_V を考察する。

図3(i)、(ii) は、面内方向、面間方向いずれかに伝搬するフォノン分散である。分散の大きさは面内と面間で大きく異なり、 $\omega_a \ll \omega_b$ である。なお、フォノンモードは本来3つが存在するが、図中では全て同じ分散を持つと単純化している。

- [3] 図3(i)、(ii) のどちらが面内で、どちらが面間方向の分散を示しているかを、系に期待される弾性特性に基づき説明せよ。
- [4] フォノン分散を $\omega(k)$ (k は波数ベクトル) としたとき、 $\omega(k) = \omega_0$ を満たす波数空間の曲面をフォノンの等エネルギー面と呼ぶ。図3の分散を持つフォノンに対し、 $\omega_0 \ll \omega_a$ 、 $\omega_a \ll \omega_0 \ll \omega_b$ の2つの領域において、フォノンの等エネルギー面の形状がどのようなものとなるかを簡単に説明せよ。
- [5] 図3の分散を持つフォノンの状態密度の角周波数依存性を $D(\omega) \propto \omega^r$ としたとき、 $\omega \ll \omega_a$ 、 $\omega_a \ll \omega \ll \omega_b$ の2つの領域で r の値がどのようになるか、理由とともに説明せよ。
- [6] C_V の温度依存性を $C_V \propto T^s$ としたとき、 $k_B T \ll \hbar \omega_a$ 、 $\hbar \omega_a \ll k_B T \ll \hbar \omega_b$ 、 $\hbar \omega_b \ll k_B T$ の3つの領域で s の値がどのようになるか、理由とともに説明せよ。ただし k_B はボルツマン定数、 \hbar はプランク定数を 2π で割ったものである。

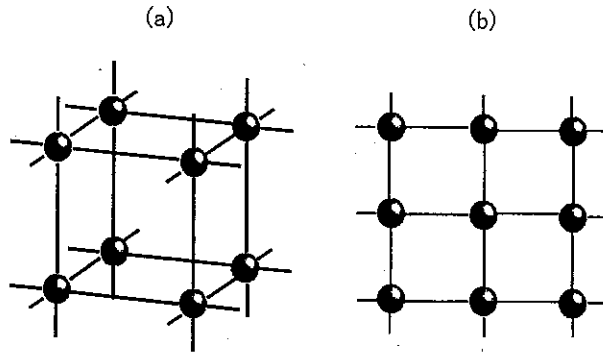


図 1: (a) 3次元立方格子、(b) 2次元正方格子

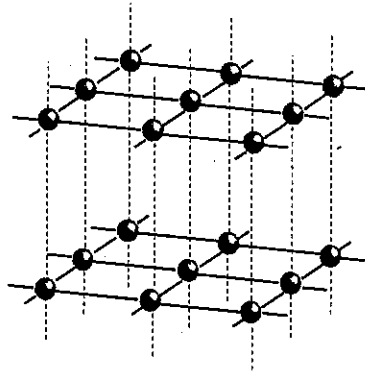


図 2: 層状構造

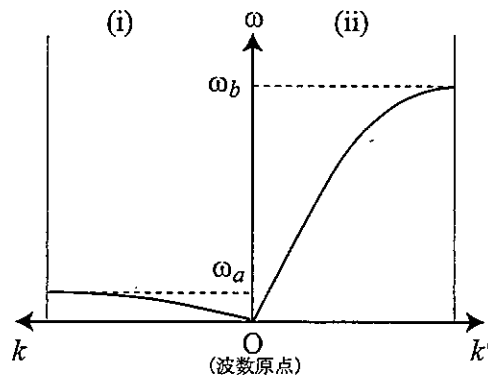


図 3: 層状構造を持つ系の第一ブリュアン域におけるフォノン分散。(i) の k と (ii) の k' は、面内方向あるいは面間方向の波数ベクトルのどちらかである。分散の大きさは面内と面間で大きく異なり、 $\omega_a \ll \omega_b$ である。