物 理 工 学 専 攻
入 学 試 験 問 題

物 理 学 Ｉ

（２問出題，２問解答）

平成２４年８月２８日（火）　９：３０～１１：３０

注意事項

１．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
２．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
３．出題された２問とも解答すること。
４．答案用紙が２枚渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
５．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
６．草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
７．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
８．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

一様に粗い水平な床面上に、半径 a、長さ l、質量 m の粗い表面を持つ3つの円柱A、B、Cがある。図1のように、円柱AとBを、長さ方向に揃えて接触させて床面上に置き、さらに円柱Cを、円柱A、B上に長さ方向を揃えて置いて、円柱A、B、Cの中心軸が正三角形状となるように積み上げたところ、円柱はそのまま静止した。このとき、重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。ただし、これらの円柱はいずれも密度が一様な剛体としてよく、また、円柱AとBの間には力が働かないとしてよい。

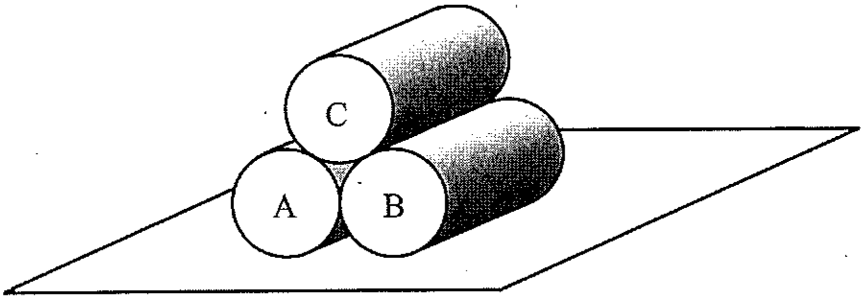


図1

[1] 円柱Bが、円柱Cおよび床面から受ける摩擦力をそれぞれ $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ とする。$\boldsymbol{F}$ および $\boldsymbol{F}'$ の作用点と向きを図示せよ。また、$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{F}'$ の大きさの関係を表す式を求めよ。

[2] 図1のように円柱Cを円柱A、B上に積み上げて静止させるために、円柱間の静止摩擦係数 μ および円柱と床面との間の静止摩擦係数 μ' が満たすべき条件をそれぞれ求めよ。

上記の円柱Aのみを同じ床面上で運動させる。図2のように、時刻 $t=0$ で、円柱の重心は位置Sにあり、その速度は右方向に v_0、中心軸まわりの角速度は反時計回りに ω_0 であった。その後、円柱Aは、床面上を滑りながら回転しつつ、しばらく右方向に移動したが、位置Tで運動の向きを左方向に変え、さらにしばらくして、床面を滑らずに転がりはじめ、そのまま転がりながら位置Sに戻ってきた。円柱と床面との間の動摩擦係数を μ'' として、以下の問いに答えよ。ただし、円柱と床面の間の転がり摩擦はないものとする。

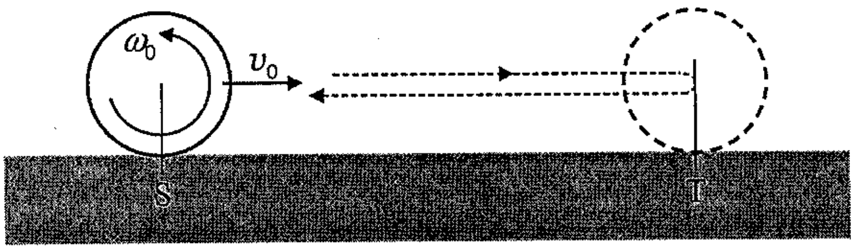


図2

[3] 円柱Aの中心軸のまわりの慣性モーメントが $\frac{1}{2}ma^2$ で与えられることを示せ。

[4] 位置SとTの間の距離を求めよ。また、位置Tでの円柱Aの回転の角速度を求めよ。

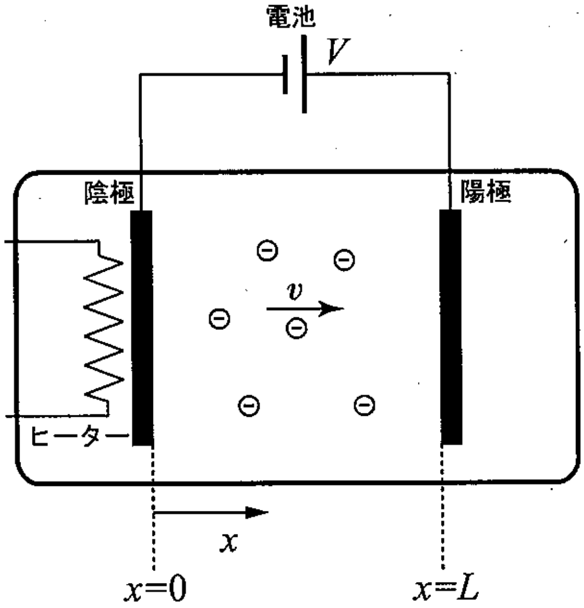
[5] 滑らずに転がりはじめるときの円柱 A の速さを求めよ。

[6] 円柱 A が位置 S まで戻り、かつそのときに滑らずに転がっているために、ω_0 はどのような条件を満たすべきか。

第2問

下図に示すように、真空容器の中に2枚の平板電極を平行にして距離Lだけ離して設置し、電圧Vの電池を接続する。そして、負の電極（陰極）をヒーターで加熱すると、熱電子放出が起き、電子は正の電極（陽極）に向かって運動し、電流が流れる。陰極の温度を上げていくと、熱電子放出が増え電流が増大するが、ある値を越えると温度を上げても電流値はほぼ一定になることが知られている。この現象は、極板間に放出された電子による電荷（空間電荷）が存在し、その電荷の作る電場が電子の放出を制限するために起きる。この状況（電流が温度によらずほぼ一定）を、以下のモデルで考える。

平板電極面に垂直にx軸を決め、陰極の位置を$x=0$とする。また、平板電極は十分広く、電子の運動はx方向だけであり、内部の電場、電位や電荷、電流の分布は、xだけの関数であると仮定する。また、ここでは、電子に働く力として、電子の密度分布$n(x)$によって決まる電位$\phi(x)$の作る電場による力を考えることにする。



電流密度$i(x)$は、

$$i(x) = -en(x)v(x) \tag{1}$$

で与えられる。eは電気素量（$e>0$）、$v(x)$は位置xでの電子のx方向の速度である。また、$\phi(x)$は

$$\varepsilon_0 \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = en(x) \tag{2}$$

を満たす（ε_0は真空の誘電率）。

電子が陰極を飛び出す時の速度は十分小さく無視できる（0と仮定する）。電位は$\phi(0)=0$とし、また、電場の大きさは$x=0$で0となることを仮定する。電子の質量をmとして、以下の問いに答えよ。

[1] 位置xにおける電子の速度$v(x)$を、その点の電位$\phi(x)$、および、e、mを用いて表せ。

[2] 定常状態では、電流密度$i(x)$は$0<x<L$でxによらない定数$-i_0$ ($i_0>0$)となる。その理由を説明せよ。

[3] 設問 [1] と [2] の議論を利用すると、式 (2) は、以下のような形になる。

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = A\phi(x)^\alpha \tag{3}$$

A を m、e、i_0、ε_0 を用いて表せ。また、α の値を求めよ。

[4] 設問 [3] で求めた方程式を解き、電位 $\phi(x)$ を m、e、i_0、ε_0、x を用いて表せ。

[5] i_0 と V の関係を求めよ。

物理工学専攻
入学試験問題

物理学 II

（４問出題，３問解答）

平成２４年８月２８日（火）　１３：００～１６：００

注意事項

1．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3．出題された４問のうちから３問を選び解答すること。
4．答案用紙が３枚渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6．草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

1次元調和ポテンシャル中の荷電粒子の運動を考える。この時のハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{X}^2$$

ここで、m は粒子の質量、ω_0 は調和振動子の角振動数である。また、$\hat{P}$、$\hat{X}$ はそれぞれ粒子の運動量と位置の演算子であり、交換関係 $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$ を満たす。ただし $\hbar$ はプランク定数を 2π で割った値とする。生成演算子 $(\hat{a}^\dagger)$ と消滅演算子 $(\hat{a})$ を以下のように定義する。

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega_0}\hat{X} - \frac{i}{\sqrt{m\omega_0}}\hat{P}\right), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega_0}\hat{X} + \frac{i}{\sqrt{m\omega_0}}\hat{P}\right)$$

ここで、交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ が成り立つ。このときハミルトニアン $\hat{H}_0$ は次のような形で書ける。

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega_0\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$$

$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ であり、$\hat{N}$ の固有値 n は非負の整数である。$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ のように $\hat{N}$ の固有状態を $|n\rangle$ であらわすと、$\hat{a}^\dagger$、$\hat{a}$ について、$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$、 $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ が成り立つ。ここで、荷電粒子の内部自由度は考えないものとする。

上記の系について、摂動を受けた時の振る舞いを考える。

[1] 摂動ハミルトニアンを $\hat{H}' = -\hat{\mu}E(t)$ とすると、摂動の最低次で $\langle l|\hat{\mu}|n\rangle \neq 0$ のときに状態 $|n\rangle$ と $|l\rangle$ の間の遷移が許される。これを電気双極子遷移と呼ぶ。ここで、$\hat{\mu} = q\hat{X}$ は電気双極子モーメントの演算子であり、$E(t)$ は時間変化する電場、q は粒子の電荷である。初期状態が $|n\rangle$ のときに、どのような状態への電気双極子遷移が可能かを示せ。

[2] ハミルトニアン $\hat{H}_0$ に非調和な摂動項 $\hat{H}_{\mathrm{AH}} = \lambda\hat{X}^4$ $(\lambda > 0)$ が加わった場合を考える。1次摂動の範囲で固有状態 $|n\rangle$ のエネルギー固有値の変化を求めよ。

[3] 設問 [2] で考えた非調和な摂動 $\hat{H}_{\mathrm{AH}}$ を受けた時の電気双極子遷移を調べたい。摂動 $\hat{H}_{\mathrm{AH}}$ を受けた時の新しい固有状態を $|n\rangle'$ とする。初期状態を $|n=8\rangle'$ としたとき、どのような状態への電気双極子遷移が可能かを示せ。なお、この時調べる遷移は、$\langle l|'\hat{\mu}|n\rangle'$ において λ の1次までのものでよい。

次に、摂動のないハミルトニアン $\hat{H}_0$ のもとでの粒子の時間発展を考える。

[4] ハミルトニアン $\hat{H}_0$ のもとで、ハイゼンベルク表示での位置演算子 $\hat{X}$ の時間発展 $\hat{X}(t)$ を求めたい。$\hat{X}(t)$ を $\hat{X}(0)$ と $\hat{P}(0)$ の線形結合の形で書き表せ。

[5] 古典力学では、調和ポテンシャル中の粒子の位置は角振動数 ω_0 で振動する。設問 [4] で調べた位置演算子の時間発展から、固有状態 $|n\rangle$ での位置の期待値 $\langle n|\hat{X}(t)|n\rangle$ を求めよ。また、位置の期待値が有限の振幅で振動するような状態の例を示せ。

第2問

液体 ^{4}He は常圧下において 2.2 K 以下で超流動状態になることが知られている。この現象を熱平衡状態にある3次元の理想ボース粒子系の簡単なモデルで考察しよう。その系の体積 $V = L^3$ は十分大きく、熱力学的極限にあると考えてよい。このボース粒子の質量を m、運動量を p として、エネルギーは $E_p = p^2/(2m)$ で与えられる。ただし、スピンは0とする。また、ボルツマン定数を k_B、プランク定数 h を 2π で割ったものを $\hbar$ とする。

必要に応じて以下の積分公式を用いてよい。

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x-1}dx = \Gamma(3/2)\zeta(3/2), \quad \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x-1}dx = \Gamma(5/2)\zeta(5/2),$$

$$\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \ \Gamma(5/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \ \zeta(3/2) \fallingdotseq 2.61, \ \zeta(5/2) \fallingdotseq 1.34,$$

ただし、$\Gamma(x)$ はガンマ関数、$\zeta(x)$ はツェータ関数である。

[1] エネルギー E の一粒子状態を占める粒子数の期待値を表すボース分布関数 $f_{\rm BE}(E)$ は温度 T、化学ポテンシャル μ を用いてどのように表せるか。また物理的に考えて、μ はどのような範囲になければならないかを答えよ。

[2] E を固定したとき、$f_{\rm BE}(E)$ は μ に対してどのように増減するかを答えよ。また μ の関数として概形を図示せよ。

[3] 状態密度 $D(E)$ を、導出過程を明記し、E、m、V を使って表せ。

[4] 粒子数の分布が [1] で求めたボース分布関数に従うとき、粒子数 $N_{\rm t}$ は次の式で計算することができる。

$$N_{\rm t} = \int_0^\infty D(E) f_{\rm BE}(E) dE$$

$N_{\rm t}$ に許される上限 $N_{\rm t}^{\rm max}$ を m、V、T を用いて表せ。またこの $N_{\rm t}^{\rm max}$ は $T \to 0$ ではどうなるか、答えよ。

[5] 全粒子数 N を固定し、温度を高温から下げていくとき、ある温度以下で $N \geq N_{\rm t}^{\rm max}$ となる。この温度 $T_{\rm c}$ を求めよ。

[6] $T_{\rm c}$ 以下の温度ではボース粒子のエネルギーに対する分布はどうなっているかを説明せよ。

[7] $T_{\rm c}$ 以下の温度領域で全エネルギー U、および定積熱容量 C_V を m、V、T を用いて表せ。

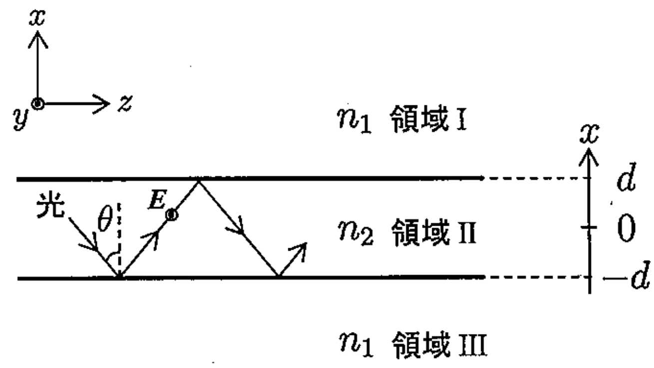
[8] ^{4}He の場合について、$T_{\rm c}$ を [5] の結果を用いて有効数字1桁で計算せよ。ただし必要に応じて以下の値を用いてよい。

液体 ^{4}He の密度: 1.5×10^2 kg/m^3、^{4}He 原子の質量: 6.7×10^{-27} kg
$\hbar = 1.1 \times 10^{-34}$ J·s、$k_B = 1.4 \times 10^{-23}$ J/K

[9] 設問 [8] で求めた $T_{\rm c}$ と、実際の ^{4}He での超流動転移温度 2.2 K との違いを考える上で、ここまで考えてきた単純化したモデルで無視している要素には何があるか。

第3問

図のような平板導波路中における光の伝搬を考える。領域IIは厚さが$2d$の誘電体薄膜であり、屈折率はn_2である。薄膜の両側(領域I、領域III)はx方向に十分厚い誘電体で、屈折率は$n_1 (1 < n_1 < n_2)$である。光はz軸の正方向に進み、系はy、z軸方向に十分大きく、電磁場のy軸方向の依存性は無視できる。以下では電場ベクトルがy軸に平行な場合を考える。また、真空中での波数を$k_0 = \omega/c$とする(ωは光の角周波数、cは光速)。



[1] 図のように、光線が界面で反射しながら$+z$方向へ伝搬しているとする。入射角はθ $(0 < \theta < \pi/2)$である。今、波動光学における波数のz成分βは、幾何光学におけるθを用いて$\beta = k_0 n_2 \sin\theta$と表される。この$\beta$がある範囲内の時にのみ、光は領域IIに閉じ込められたまま$+z$方向へ伝搬する。βの取りうる範囲をk_0、n_1、n_2を用いて表せ。

[2] 実際には、光は薄膜内を波動として伝搬しており、マクスウェル方程式により記述される。今、$+z$方向へ伝搬する電磁場の波数をβ (> 0)で表せば、電場ベクトル$\boldsymbol{E}$、磁場ベクトル$\boldsymbol{H}$は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= (0, E_y(x), 0)e^{i(\omega t - \beta z)} \\ \boldsymbol{H} &= (H_x(x), H_y(x), H_z(x))e^{i(\omega t - \beta z)}\end{aligned}$$

ここで、電磁場の振幅がy軸方向の依存性を持たないこと、電場ベクトルがy軸に平行であることを考慮した。マクスウェル方程式$\nabla \times \boldsymbol{H} = \epsilon_j \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$、$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$を用いて、$E_y(x)$、$H_x(x)$、$H_y(x)$、$H_z(x)$の満たす方程式を書け。ただし真電荷や真電流は存在せず、ϵ_jは誘電率である($j = 1$が領域I、IIIに、$j = 2$が領域IIに対応する)。ここでは透磁率は領域によらずその真空中での値μ_0であるとする。

[3] 幾何光学的描像からも予想されるように、領域II内を伝搬する電磁場は、磁場ベクトルがz成分を持つ。[2]で求めた方程式を用いて、電磁場が存在する時、$H_z(x) \neq 0$であることを示せ。ただし、$\beta \neq k_0 n_2$、$\mu_0 \epsilon_j = n_j^2/c^2$ $(j = 1, 2)$であることに注意せよ。

設問[1]で求めたβの条件は、光を領域IIに閉じ込める必要条件でしかない。実際にはβは離散的な値となる。以下、これを示そう。

[4] 設問[2]で求めた方程式から、$E_y(x)$に関する以下の微分方程式が得られることを示せ。

$$\frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + (k_0^2 n_j^2 - \beta^2)E_y(x) = 0, \quad j = \begin{cases} 1 & (|x| > d) \\ 2 & (|x| < d) \end{cases}$$

[5] $E_y(x)$ の微分方程式と境界面での接続条件（$E_y(x)$ と dE_y/dx が連続）より、固有関数 $E_y(x)$ と固有値 β が求まる。簡単のため $E_y(x)$ を偶関数とする（つまり $E_y(x) = E_y(-x)$)。今、β の満たすべき固有値方程式を、

$$\tan(A(\beta)) = B(\beta)$$

と書いた時、$A(\beta)$、$B(\beta)$ を求めよ。ただし、β は [1] で求めた条件を満たしているとせよ。

[6] 設問 [5] の固有値方程式は、$\tan(A(\beta)) = \tan(A(\beta) - m\pi)$ (m は整数) を考慮すれば、以下のように書き直せる (ただし $\arctan(0) = 0$ とする)。

$$F(\beta) \equiv A(\beta) - \arctan(B(\beta)) = m\pi$$

$F(\beta)$ の取りうる範囲を求めることで、固有値方程式を満たす β が少なくとも一つは存在することを示せ。また、方程式を満たす β が一つだけ存在する条件を示し、その時の $E_y(x)$ の概形を描け。

第4問

はじめに、単位格子内に質量 m の原子を二つ含む1次元格子を考える。図1のように隣接する原子間にはバネ定数 C_1 及び C_2 （$C_1 > C_2 > 0$）のバネで表される相互作用が交互に働いており、平衡時の単位格子の長さを a とする。これらの原子が1次元方向に微小振動するとき、二種類の固有振動モード（光学モード、音響モード）が存在する。以下の設問に答えよ。ただし、右方向を正とする。

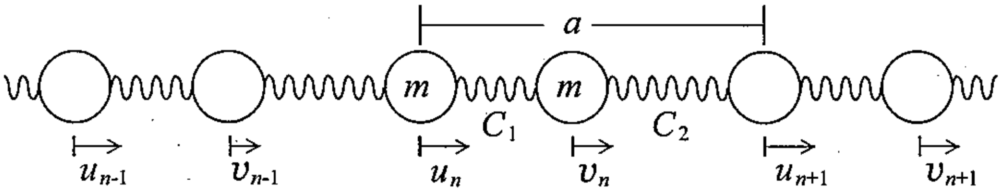


図1

[1] n 番目の単位格子内にある原子の平衡位置からの微小変位を、それぞれ u_n、v_n としてニュートンの運動方程式をたて、角振動数 ω と波数 k の関係（フォノンの分散関係）を二種類求めよ。

[2] 設問 [1] で求めた分散関係を第1ブリユアン域内で図示し、$k = 0, \pi/a$ における ω の値を求めよ。また、二種類のモードの長波長極限での群速度を求めよ。

[3] 長波長極限における二つの振動モードにおいて、原子はどのように振動するか、簡潔に述べよ。

次に、図2に示した結晶模型のフォノンの分散関係を調べるための光子及び中性子の非弾性散乱実験を考える。この結晶模型は単位格子内に質量 m の原子を二つ含み、x 方向の格子定数は a である。原子の変位は x 方向に限られるとし、フォノンの波数ベクトルは $\boldsymbol{q}=(q, 0, 0)$ にのみ着目する。また、x 方向の分散関係は、上記の1次元格子のそれで近似できると仮定する。このとき、波数ベクトル $(\pm\pi/a, 0, 0)$ は、1次元格子の第1ブリユアン域境界に相当する。以下の設問に答えよ。

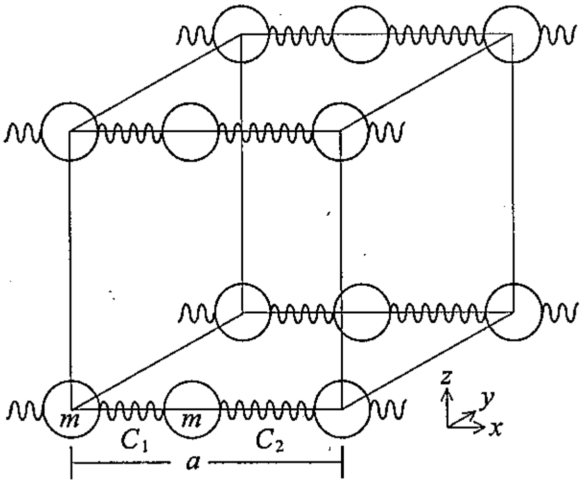


図2

[4] 可視光域のレーザー光が音響フォノンによって散乱される過程をブリユアン散乱と呼ぶ。入射光、散乱光、生成されるフォノンの角振動数をそれぞれ ω_{i}、ω_{f}、ω_{B}、試料内での波数ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{K}_{\mathrm{i}}$、$\boldsymbol{K}_{\mathrm{f}}$、$\boldsymbol{q}_{\mathrm{B}}$ とすると、$\omega_{\mathrm{i}} - \omega_{\mathrm{f}} = \omega_{\mathrm{B}}$ が成り立つ。試料内でのレーザー光の散乱角を θ とするとき、$\boldsymbol{K}_{\mathrm{i}}$、$\boldsymbol{K}_{\mathrm{f}}$、$\boldsymbol{q}_{\mathrm{B}}$ の関係を図示せよ。また、$\omega_{\mathrm{i}} \gg \omega_{\mathrm{B}}$ となることを考慮して、$|\boldsymbol{q}_{\mathrm{B}}|$ と $|\boldsymbol{K}_{\mathrm{i}}|$ の関係を示せ。

[5] この結晶の屈折率を n、真空中の光速を c、音速（音響モードの長波長極限における群速度）を v_{a} として、ω_{B} と ω_{i} の関係を求めよ。ただし、フォノンの長波長極限を考える。

[6] 波長 680 nm のレーザー光を x 方向に入射し、散乱角 θ を 180° に固定して散乱光をエネルギー分解した。観測されたエネルギーシフト $\hbar\omega_{\mathrm{B}}$ を $\hbar\omega_{\mathrm{B}} = hc/\lambda_{\mathrm{B}}$ ($\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったもの) と表現したとき、$1/\lambda_{\mathrm{B}}$=3.0 cm^{-1} であった。光速 c、屈折率 n をそれぞれ 3.0×10^8 m/s、2.4 とし、音速 v_{a} を有効数字 2 桁で計算せよ。

[7] 入射中性子がフォノンを励起する非弾性散乱を考える。励起されるフォノンの波数ベクトル q を $(\pi/a, 0, 0)$ に、また散乱後に検出される中性子の波長を λ_{f} に固定したところ、入射する中性子の波長が λ_{i1}、λ_{i2}（$\lambda_{\mathrm{i1}} < \lambda_{\mathrm{i2}}$）のときに、フォノンによる散乱が観測されたとする。m、λ_{f}、λ_{i1}、λ_{i2}、中性子の質量 M_{n} を用いて C_1 と C_2 を表せ。

[8] 以上の結果から、この結晶模型の格子定数 a を、v_{a}、λ_{f}、λ_{i1}、λ_{i2}、M_{n} を用いて表せ。