

物理工学専攻 入学試験問題

物理学 I

(2問出題, 2問解答)

平成23年8月30日(火) 9:30~11:30

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 出題された2問とも解答すること。
4. 答案用紙が2枚渡されるから, 1題ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙上方の指定された箇所に, その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号, 符号などを記入した答案は無効とする。
8. 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

図1のように、質量 m の質点が長さ ℓ_0 の質量の無視できる細い糸に結ばれており、糸の他端は半径 a の動かない円板の円周上の一点 A に固定されている。時刻 $t = 0$ に初速 $v_0 > 0$ を x 軸の負方向に与えるとき、質点の運動にともなって糸が円板に巻きついていく運動を考える (図2参照)。この運動は xy 平面内で起こるものとする。糸が円板から離れる点を Q とし、運動を記述する座標として x 軸と動径ベクトル \vec{OQ} のなす角度 $\varphi(t)$ をとる。質点には糸からの張力 $T(t)$ のみが働き、運動の途中で糸がたるむことはない。重力や摩擦は考えないものとする。

- [1] この質点の運動では、(i)「運動エネルギーは保存する」が、(ii)「原点 O のまわりの角運動量は保存しない」。 (i)、(ii) について、それぞれ物理的な理由を簡潔に説明せよ。
- [2] 質点の位置ベクトル $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ 、速度ベクトル $\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = (\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t))$ 、および原点 O のまわりの角運動量 $L(t) = m(x(t)\frac{d}{dt}y(t) - y(t)\frac{d}{dt}x(t))$ を、 $\varphi(t)$ 、 $\frac{d}{dt}\varphi(t)$ を用いて表せ。
- [3] 設問 [1] の考察より、速度ベクトルの大きさ $|\mathbf{v}(t)| = v_0 (= \text{const.})$ が成り立つ。この微分方程式を解き、 $\varphi(t)$ を t の関数として求めよ。また、糸が巻きつき終わる時刻 τ (質点が円板に衝突する時刻) を求めよ。
- [4] 張力ベクトル $\mathbf{T}(t) = (T_x(t), T_y(t))$ を求めよ。ただし、最終結果は $\frac{d}{dt}\varphi(t)$ 、 $\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)$ を用いずに、 $\varphi(t)$ を用いて表せ。 $\mathbf{T}(t)$ の表式に基づいて、この運動は微小時間間隔でどのような運動であると物理的に解釈できるか述べよ。
- [5] 原点 O のまわりの張力のモーメント $N(t) = x(t)T_y(t) - y(t)T_x(t)$ を求めよ。また、 $\frac{d}{dt}L(t) = N(t)$ が成り立つことを示せ。

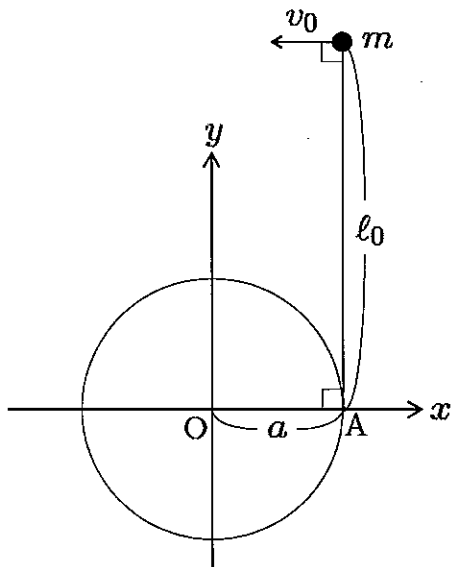


図1:時刻 $t = 0$

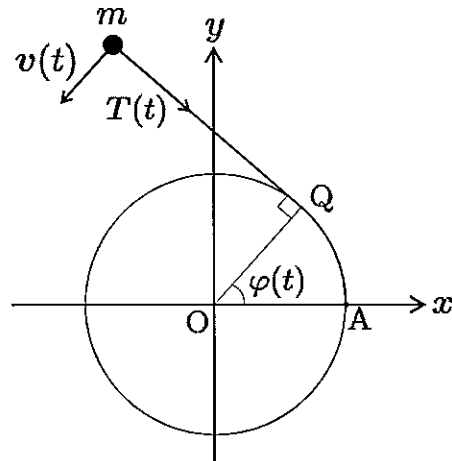


図2:時刻 $t > 0$

第2問

図のような円柱状の導体内で発生するジュール熱について考える。円柱導体の半径を a 、長さを L とする。 L は a に対して十分に長く、端の効果は無視できるとする。電磁場の表記については SI 単位系を使用するものとする。

- [1] まず、電子が電場によって加速されて運動する場合に発生するジュール熱について、電子の運動を以下のようにモデル化して考察する。

電場は円柱の軸方向に印加され、電子の運動は電場と平行な一軸方向のみを考える。電子は電場から力を受けて等加速度運動を行うが、時間 2τ ごとに散乱を受けて運動エネルギーを全て失い、速度がゼロとなると仮定する。散乱後、この運動を繰り返すものとする。

電場の強さを E 、電子の質量を m 、電子の電荷を q 、単位体積あたりの電子数を n として、以下の設問に答えよ。

- [1.1] 平均速度 v_a を式で表せ。

- [1.2] 電流が電圧に比例すること（オームの法則）が成り立つことを示せ。また、円柱導体の材質の電気伝導率 σ の表式を求めよ。

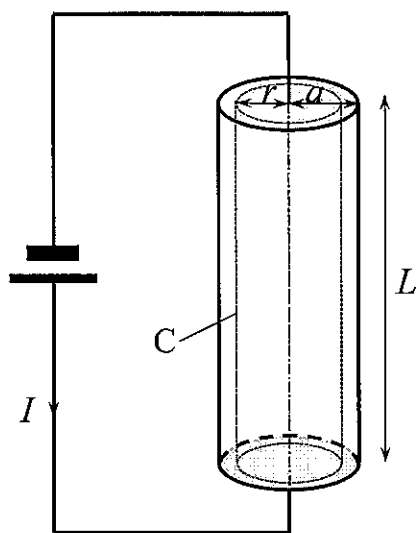
- [1.3] この導体で発生する単位時間・単位体積あたりのジュール熱 J を、電気伝導率 σ 、電流 I と半径 a を用いて表せ。また、散乱によって単位時間・単位体積あたりに電子の失う運動エネルギーが J に等しくなることを示せ。

- [2] 次に、電磁場のエネルギー流の観点から導体におけるジュール発熱を考察する。図のように外部電源が円柱導体に接続され定常電流 I が円柱導体の下端から上端に流れている状況を考える。ここで電流の値は十分小さく、電気伝導率が局所的に定義できるとする。

- [2.1] 物質中に電場 E 、磁場 H があるとき、エネルギー流束密度はポインティングベクトル $S = E \times H$ によって与えられる。ここで“ \times ”はベクトル積を表す。円柱導体の材質が一律で電気伝導率 σ を持つ場合に、円柱導体内部で円柱軸から距離 r ($< a$) の位置における S の向きと大きさを求めよ。

- [2.2] 図のように円柱導体の内部に軸を共有する半径 r ($< a$)、長さ L の円柱領域 C を考える。このとき単位時間あたりに円柱領域 C 内に流出入するエネルギーの大きさは $|S|$ を C の表面で積分したものに等しい。これを求め、単位時間あたりに円柱領域 C 内で発生するジュール熱と比較せよ。以上の結果に基づき、この系におけるエネルギー保存について議論せよ。

- [2.3] 円柱導体の材質が一律ではなく、電気伝導率が r のみの関数で $\sigma(r)$ と表せる場合を考える。電流密度 $j(r)$ の大きさを r の関数として表せ。微分記号または積分記号を含んだままでも構わない。[2.2] の場合と同様に、単位時間あたりに半径 r の円柱領域 C 内に流出入するエネルギーを求め、 C 内で発生するジュール熱と比較せよ。



图

物理工学専攻 入学試験問題

物理学Ⅱ

(4問出題, 3問解答)

平成23年8月30日(火) 13:00~16:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 出題された4問のうちから3問を選び解答すること。
4. 答案用紙が3枚渡されるから, 1題ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙上方の指定された箇所に, その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号, 符号などを記入した答案は無効とする。
8. 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

スピン角運動量を表す演算子 $J = (J_x, J_y, J_z)$ において、 J^2 と J_z の固有値をそれぞれ $J(J+1)\hbar^2$ 、 $m\hbar$ とする両者の同時固有関数を $|J, m\rangle$ とする。 J は整数または半奇数、 $m = J, J-1, \dots, -J$ である。 $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ とすると、 $J_{\pm}|J, m\rangle = \hbar\sqrt{(J \mp m)(J \pm m + 1)}|J, m \pm 1\rangle$ が成り立つ。 $\hbar = 2\pi\hbar$ はプランク定数である。

以下では、 z 軸方向の静磁場 $B = (0, 0, B)$ が印加された $J = 1$ の系を考える ($B > 0$)。

- [1] $\{|J, m\rangle\}$ を基底として、 J_x, J_y, J_z の行列表示を求めよ。
- [2] この系のハミルトニアンは比例定数 γ ($\gamma > 0$) を用いて $H_M = -\gamma J \cdot B$ で与えられるとする。この系のエネルギー固有値を全て求めよ。
- [3] この系に x 軸方向の交流磁場 $B_{RF} = (2B_{RF} \cos \omega t, 0, 0)$ を印加することを考える ($B_{RF} > 0$)。[2] で求めた H_M のエネルギー準位間で遷移を生じさせるために、 $\hbar\omega$ を H_M の固有エネルギー準位間隔に一致するようにとる。 $B_{RF} \ll B$ の場合、この系の時刻 t における状態を $|\varphi(t)\rangle$ とすると、 $|\Psi(t)\rangle = \exp(-i\omega t J_z)|\varphi(t)\rangle$ の時間発展は、 $H_{RF} = -\gamma B_{RF} J_x$ を用いて $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H_{RF} |\Psi(t)\rangle$ により近似的に記述される。 $|\Psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t) |J, m\rangle$ と展開されることを利用して、 $|\Psi(t)\rangle$ および J_z の期待値の時間変化を求めよ。ただし、時刻 $t = 0$ においてこの系は H_M の最低エネルギー固有状態にあるとする。
- [4] 設問 [2] の系に対して相互作用 $H_Q = A(2J_x^2 - J_y^2 - J_z^2)$ が加わり、全系のハミルトニアンが $H = H_M + H_Q$ で与えられるとする。 A ($A > 0$) は定数である。 H_Q の効果が H_M に比べて十分小さいとして一次摂動を用いることにより、この系のエネルギー固有値を全て求めよ。 H_Q がない場合と H_Q がある場合のエネルギー準位を図示せよ。

第2問

N 個の質量 m の同種粒子が、長さ L の直線上に閉じ込められた一次元気体を考える。この気体は絶対温度 T で熱平衡状態にあるとする。この系は、十分高温にありボルツマン統計に従うとして以下の問いに答えよ。ここで、一粒子の位相空間の大きさ h あたり一個の量子状態があるという対応関係が成り立つとしてよい。 h はプランク定数である。また、 $N \gg 1$ であり、計算にはスターリングの公式 $\ln N! \simeq N \ln N - N$ を用いてよい。スピンの自由度は考えないこととする。

- [1] 粒子の間にまったく相互作用がない場合、この気体 A の分配関数 Z_A を求め、それを N 、 $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$ 、 L を用いて示せ。ここで $\hbar = h/2\pi$ であり、 k_B はボルツマン定数である。必要があれば、 $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$ を用いよ。
- [2] この気体 A の自由エネルギー $F(T, L)$ を求めよ。
- [3] この気体 A の化学ポテンシャル $\mu(T, L)$ を求めよ。
- [4] ここで、十分高温において系がボルツマン統計に従うという意味について考えてみよう。ボルツマン統計では、エネルギー E_k の準位を占拠する粒子数の期待値が $\bar{n}_k = \exp((\mu - E_k)/k_B T)$ で与えられ、 $\bar{n}_k \ll 1$ を仮定している。この仮定が成り立つための条件を、設問 [3] の結果を利用し、 L 、 N 、 λ であらわせ。また、物理量 λ の次元を明らかにし、その物理的意味を述べ、上で求めた条件の意味を説明せよ。
- [5] 次に、気体粒子間に粒子の中心間距離 R の関数として、

$$v(R) = \begin{cases} \infty & (R < d \text{ のとき}) \\ 0 & (R \geq d \text{ のとき}) \end{cases}$$

のような剛体的な斥力ポテンシャルが働いている気体 B を考える。長さ L の領域の両端と粒子も剛体的に相互作用しており、粒子の中心と両端との距離は $d/2$ より小さくならないとする。ここで、 $L \gg Nd$ が成り立っているとして、この気体 B の分配関数 Z_B を求めよ。また、気体 B の状態方程式を求め、気体 A との違いについて簡単に考察せよ。

第3問

平面を界面として2種類の媒質が接しているとき、角周波数 $\omega > 0$ で振動する電磁場の定常状態について考える。界面および2つの媒質中には、真電荷も真電流も存在しないとする。以下で太文字記号はベクトル量を表す。また、 ϵ_0 を真空の誘電率、 μ_0 を真空の透磁率、 c を真空中の光速とする。

界面が $z = 0$ となるように xyz 座標系をとり、 $z < 0$ の側を媒質1、 $z > 0$ の側を媒質2と呼ぶ。角周波数 ω における媒質 j ($j = 1, 2$) の誘電率を ϵ_j とし、これらはスカラーの実数である。また、どちらの媒質も、透磁率は μ_0 に等しいとする。ここでは、位置 (x, y, z) における時刻 t の電場ベクトル $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ と磁場ベクトル $\mathbf{H}(x, y, z, t)$ が、

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, z)e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}(x, z)e^{-i\omega t}$$

と書ける状態のみについて考えることとし、さらに、ベクトル $\mathbf{H}(x, z)$ の x, z 成分は常にゼロとする。真電荷や真電流が存在しないとき、時間依存性が $e^{-i\omega t}$ の形を持つ電磁場のマクスウェルの方程式は、 $\text{div}\mathbf{D} = 0$ 、 $\text{div}\mathbf{B} = 0$ 、 $\text{rot}\mathbf{H} + i\omega\mathbf{D} = 0$ 、 $\text{rot}\mathbf{E} - i\omega\mathbf{B} = 0$ であり、媒質 j ($j = 1, 2$) 内では $\mathbf{D} = \epsilon_j\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H} = \mu_0^{-1}\mathbf{B}$ が成り立つ。以下の設問に答えよ。

- [1] 媒質1の屈折率が $n > 1$ 、媒質2が真空の場合を考える(図1)。このとき、 $\sqrt{\epsilon_1\mu_0} = n/c$ 、 $\sqrt{\epsilon_2\mu_0} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 1/c$ である。媒質1の領域から界面に入射した波数ベクトル $\mathbf{k}_{\text{in}} = (k_x, 0, k_1)$ を持つ平面波が全反射し、 $z > 0$ の領域における電場が $\mathbf{E}(x, z) = \mathbf{E}_2 e^{ik_x x - \kappa_2 z}$ の形を持つための k_x の範囲を求めたい。ただし、 $k_x \geq 0$ 、 $k_1 > 0$ 、 $\kappa_2 > 0$ とする。まず、公式 $\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E}$ とマクスウェルの方程式を使い、 k_1 および κ_2 を k_x 、 n 、 c 、 ω の式で表せ。なお、 Δ はラプラシアンである。次に、 ω 、 c 、 n を用いて k_x の取り得る範囲を表せ。

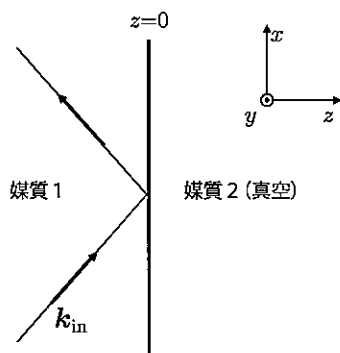


図1

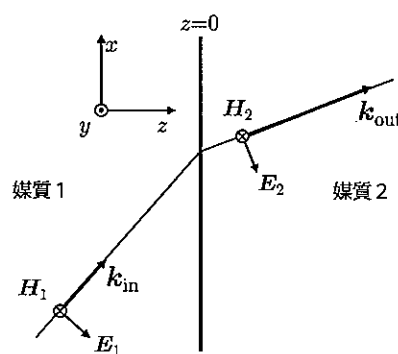


図2

- [2] $\epsilon_2 > \epsilon_1 > 0$ の場合を考える(図2)。媒質1の領域から界面に入射した波数ベクトル $\mathbf{k}_{\text{in}} = (k_x, 0, k_1)$ を持つ平面波が、反射することなく完全に界面を透過し、波数ベクトル $\mathbf{k}_{\text{out}} = (k_x, 0, k_2)$ の屈折波として媒質2を伝播するための k_x の条件を求めたい。ただし、 $k_x \geq 0$ 、 $k_1 > 0$ とする。この時の電磁場は、

$$\mathbf{E}(x, z) = \begin{cases} \mathbf{E}_1 e^{i(k_x x + k_1 z)} & (z < 0) \\ \mathbf{E}_2 e^{i(k_x x + k_2 z)} & (z > 0) \end{cases} \quad \mathbf{H}(x, z) = \begin{cases} \mathbf{H}_1 e^{i(k_x x + k_1 z)} & (z < 0) \\ \mathbf{H}_2 e^{i(k_x x + k_2 z)} & (z > 0) \end{cases}$$

と書ける。まず、 $\zeta_1 \equiv E_{1,x}/H_{1,y}$ および $\zeta_2 \equiv E_{2,x}/H_{2,y}$ を計算し、 ω 、 k_1 、 k_2 、 ϵ_1 、 ϵ_2 を用いて表せ。なお、 $E_{j,x}$ はベクトル \mathbf{E}_j の x 成分を表し、 $H_{j,y}$ はベクトル \mathbf{H}_j の y 成分を表す。次に、界面における電磁場の接続条件を用いて、 k_x を ω 、 μ_0 、 ϵ_1 、 ϵ_2 の式で表せ。

[3] 媒質 1 が真空、媒質 2 が金属の場合を考え、 $\epsilon_1 = \epsilon_0$ 、 $\epsilon_2 < -\epsilon_0$ とする。このとき、

$$\mathbf{E}(x, z) = \begin{cases} E_1 e^{ik_x x + \kappa_1 z} & (z < 0) \\ E_2 e^{ik_x x - \kappa_2 z} & (z > 0) \end{cases} \quad \mathbf{H}(x, z) = \begin{cases} H_1 e^{ik_x x + \kappa_1 z} & (z < 0) \\ H_2 e^{ik_x x - \kappa_2 z} & (z > 0) \end{cases}$$

の形を持つ状態を考える。ただし、 $\kappa_1 > 0$ 、 $\kappa_2 > 0$ である。このような状態が存在する時の k_x と ω の関係から、 k_x を、 ω 、 $|\epsilon_2|$ 、 ϵ_0 、 μ_0 を用いて表せ。また、 k_x と ω/c の大小関係について述べよ。

[4] 設問 [3] の状態を光で励起したい場合、図 3 のようにプリズムを用いた配置がよく用いられる。この配置では、プリズムを金属表面のごく近くに置き、金属がなければ全反射が起こるような角度で光を入射する。設問 [1] と [3] を参考にして、光を直接金属表面に照射するのに比べてこの配置が優れている点を説明せよ。

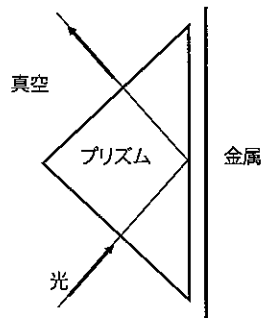


図 3

第4問

孤立した原子が集まって結晶を構成すると電子状態がどのように変化するか、一次元モデルを使って考えよう。まず、孤立した元素 A の原子を考え、その最外殻の原子軌道 $\phi_A(x)$ がシュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right) \phi_A(x) = E_A \phi_A(x)$$

を満たすとする。ここで $\hbar = 2\pi\hbar$ はプランク定数、 m は電子の質量、 $u(x)$ は原点にある A 原子イオンのポテンシャルである。さて、A 原子が間隔 a で並んで図 1 のような一次元結晶を構成すると、そのシュレーディンガー方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right) \psi(x) = E\psi(x), \quad (1)$$

と書ける。ここで $U(x) = \sum_{j=1}^M u(x - ja)$ 、 M は原子の数 ($M \gg 1$) である。(1) 式を周期的境界条件 $\psi(x) = \psi(x + Ma)$ の下で解こう。以下、 ϕ_A 以外の A 原子の原子軌道は無視できるとし、電子間の相互作用は考えない。

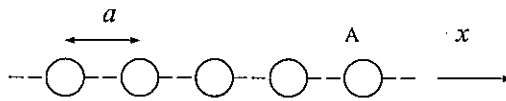


図 1: A 原子の一次元結晶

[1] この結晶に対して

$$\psi_k(x) = \sum_{j=1}^M e^{ik \cdot (ja)} \phi_A(x - ja) \quad (2)$$

の形の解を仮定した時 k が満たすべき条件は何か。波動関数の規格化については考慮しなくてよい。

[2] $\psi_k(x)$ のエネルギー固有値を $E(k)$ と書こう。 $\psi_k(x)$ を (1) 式に代入し、その両辺に $\phi_A^*(x)$ をかけて全空間で積分して、 $E(k)$ を表せ。このとき、原子軌道間の重なり積分およびポテンシャルの行列要素の計算については、以下に示す積分のみが無視できないとし、それらの値は実数であるとする。

$$\begin{aligned} \int \phi_A^*(x - ma) \phi_A(x - na) dx &= \delta_{mn} \\ \beta &\equiv \int \phi_A^*(x) u(x \pm a) \phi_A(x) dx \\ \gamma &\equiv \int \phi_A^*(x) u(x) \phi_A(x \pm a) dx \end{aligned}$$

ここで、 δ_{mn} はクロネッカーのデルタ記号である。

[3] 設問 [2] で求めた $E(k)$ を第一ブリュアン域内で図示せよ。図中に E_A, β, γ を示し、その符号や大きさについて原子や結晶固体の安定性に関連づけて簡潔に議論せよ。

[4] 設問 [2] で求めた $E(k)$ を持つ一次元結晶において、原子軌道 ϕ_A を占める平均電子数が各原子当たり 1 に比べて十分少ない場合と、2 よりも少ないが殆ど 2 である場合についてそれぞれキャリアの有効質量を計算せよ。

今度は図2に模式的に示すようなA原子とB原子が結合した分子の一次元結晶を考える。孤立したB原子の最外殻の規格化された原子軌道を $\phi_B(x)$ 、そのエネルギーを E_B 、B原子イオンのポテンシャルを $w(x)$ とする。ここで、原子軌道間の重なり積分およびポテンシャルの行列要素の計算については、設問[2]に示した β と γ の他に、同一分子内の ϕ_A と ϕ_B 間の以下に示す二種類の積分だけが無視出来ないとし、どちらも実数 δ で表されるとしよう。

$$\delta \equiv \int \phi_A^*(x)u(x)\phi_B(x)dx = \int \phi_A^*(x)w(x)\phi_B(x)dx$$

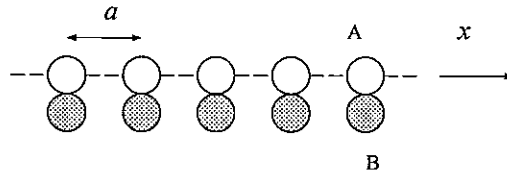


図2: AB分子の一次元結晶

- [5] (1) 式の $U(x)$ に B 原子イオンによるポテンシャル $W(x) = \sum_{j=1}^M w(x - ja)$ を加えた一次元分子結晶のシュレーディンガー方程式の解を

$$\Psi_k(x) = \sum_{j=1}^M e^{ik \cdot (ja)} (c_k \phi_A(x - ja) + d_k \phi_B(x - ja)) \quad (3)$$

と仮定し、 c_k, d_k に対する連立方程式を書け。ただし、エネルギー固有値を $E(k)$ とする。

- [6] 設問[5]で導入した $E(k)$ を以下の手順で考察せよ。まず簡単のため $\delta = 0$ において $E(k)$ を求めよ。この時 $|E_A - E_B + 2\beta| \ll |\gamma|$ の場合と $|E_A - E_B + 2\beta| \gg |\gamma|$ の場合についてそれぞれ $E(k)$ を図示せよ。次に $\delta \neq 0$ とした時の $E(k)$ を求めよ。 $|\delta| \ll |\gamma|$ とし、 $|E_A - E_B + 2\beta| \ll |\gamma|$ の場合と $|E_A - E_B + 2\beta| \gg |\gamma|$ の場合についてそれぞれ $E(k)$ を図示せよ。図中に $E_A, E_B, \beta, \gamma, \delta$ を示せ。