物理工学専攻
入学試験問題

専門科目

（４問出題，３問解答）

平成２１年９月１日（火）　１３：００～１６：００

注意事項

１．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
２．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
３．出題された４問のうちから３問を選び解答すること。
４．答案用紙が３枚渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
５．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
６．草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
７．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
８．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第１問

磁場中にある磁気モーメントは、磁場方向を回転軸とする歳差運動をする。このことを量子力学的に示すために、スピン演算子 $\boldsymbol{S}=(S_x, S_y, S_z)$ の期待値の時間発展をハイゼンベルグ描像とシュレーディンガー描像の２通りの方法で計算しよう。ただし、磁束密度は時間によらず $\boldsymbol{B}_0=(0,0,B_0)$ とし、スピン $\boldsymbol{S}$ と磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ との間には $\boldsymbol{\mu}=\gamma\hbar\,\boldsymbol{S}$ の関係がある。ここで、γ はスピンの磁気回転比、$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったものである。

[1] この系のハミルトニアンを書け。

[2] ハイゼンベルグ描像に立ち、$\boldsymbol{S}$ を時間に依存する演算子として、以下の設問に答えよ。

[2.1] S_x に対するハイゼンベルグの運動方程式を書き下せ。

[2.2] S_x の期待値 $\langle S_x\rangle$ の時間変化を求めよ。ただし、時刻 t=0 において $\langle S_x\rangle=0$ とする。

[2.3] 同様にして、$\langle S_z\rangle$ と $\langle S_x^2+S_y^2\rangle$ の時間変化を求め、[2.2] の結果と合わせて、$\langle \boldsymbol{S}\rangle$ が歳差運動していることを説明せよ。

[3] シュレーディンガー描像に立ち、$\boldsymbol{S}$ を時間に依存しない演算子として、以下の設問に答えよ。

[3.1] 時刻 t におけるスピン状態 $|t\rangle$ は、初期状態 $|0\rangle$ に時間発展演算子を作用させることで得られる。この方法で得た状態 $|t\rangle$ について $\langle S_x\rangle$ を計算することにより、[2.2] と同様な結果が導かれることを示せ。ただし、任意の実数 θ に対して成り立つ次の等式を用いよ。

$$\exp(-i\theta S_z)S_x\exp(i\theta S_z)=S_x\cos\theta+S_y\sin\theta \qquad (1)$$

[3.2] 等式 (1) を次の手順で証明せよ。

i) $f(\theta)=\exp(-i\theta S_z)S_x\exp(i\theta S_z)$ として、$df(\theta)/d\theta$ と $d^2f(\theta)/d\theta^2$ を求めよ。
特に後者は、f のみに関する式となる。

ii) i) で得た微分方程式を解くことにより、等式 (1) を証明せよ。

第2問

結晶の定積比熱 C_V の低温における温度 T に対する依存性は、C_V/T を T^2 に対してプロットした形で示されることが多い。この理由を以下の手順に従って考える。

電子と格子振動からの比熱への寄与のうち、まず電子からの寄与について考える。簡単のため、電子間や電子と格子振動の間の相互作用は無視する。結晶の体積を V、$T=0$ での電子の化学ポテンシャル（フェルミエネルギー）を ε_{F}、ボルツマン定数を k_{B}、プランク定数 h を 2π で割ったものを $\hbar$ とする。

[1] エネルギー ε をもつ量子状態が電子により占有される確率 $f(\varepsilon)$ の関数形を示し、T における概形を ε の関数として図示せよ。ただし T における電子の化学ポテンシャルを μ とする。

[2] 電子が単位体積、エネルギー、スピンあたりにとりうる状態数は、$\varepsilon=\varepsilon_{\mathrm{F}}$ 付近で定数 D_0 とみなせるとする。このとき、低温において化学ポテンシャル μ が T に依存しないことを示せ。ただし、[1] の $f(\varepsilon)$ と任意の関数 $g(\varepsilon)$ に対して低温で成り立つ T に関する展開式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon=\int_{-\infty}^{\mu} g(\varepsilon)d\varepsilon+\frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2\frac{dg}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=\mu}+\frac{7\pi^4}{360}(k_{\mathrm{B}}T)^4\frac{d^3g}{d\varepsilon^3}\bigg|_{\varepsilon=\mu}+\cdots$$

を用いて良い。

[3] 電子のもつ内部エネルギーの低温における T 依存性を考えることにより、C_V に対する電子からの寄与を計算せよ。

次に格子振動からの寄与を考える。格子振動を表す量子はフォノンと呼ばれ、化学ポテンシャルを 0 としたボーズ・アインシュタイン統計に従う。低温における C_V へのフォノンからの寄与は音響モードによって支配される。結晶格子は単位胞あたり 1 つの原子を含むとする。

[4] 角振動数 ω をもつ量子状態がフォノンにより占有される確率 $n(\omega)$ の関数形を示し、T における概形を ω の関数として図示せよ。

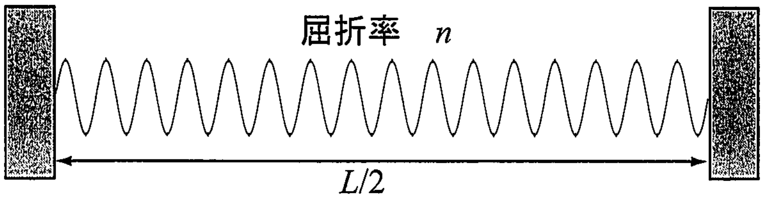
[5] 簡単のために、音響モードが線形の分散関係 $\omega=vk$（v は音速, $k=|\boldsymbol{k}|$, $\boldsymbol{k}$ は波数ベクトル）をもつと仮定して、フォノンが単位角振動数、モードあたりにとりうる状態数 $\rho(\omega)$ を求めよ。

[6] [5] の仮定のもとで、フォノンの内部エネルギーの低温における T 依存性から、C_V に対するフォノンからの寄与を計算せよ。ただし音響モードは3つ存在し、いずれも同じ線形の分散関係 $\omega=vk$ をもつとする。また $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx=\frac{\pi^4}{15}$ や $\int_0^\infty \frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}dx=\frac{4\pi^4}{15}$ を用いて良い。

[7] [3] と [6] の結果をもとに、結晶の低温比熱の振る舞いが C_V/T を T^2 に対してプロットした形で示される理由について、プロットから読み取れる物理量と合わせて述べよ。また、低温極限 $T\to 0$ で C_V/T が 0 となるのは結晶がどのような性質をもつ場合か。

第3問

図のような２枚の平行なミラーでできた光共振器を考える。光速を c、共振器一往復の幾何学的距離を L、光の角周波数を ω、共振器内部の屈折率を n で表す。共振器外部での分散は考えない。



[1] 共振器内部で角周波数 ω の光が一往復する間の光電場の位相の変化量 θ を c、ω、L、n で表せ。簡単のため、反射による位相シフトは考えないこととする。

[2] $\theta = 2\pi m$（m は自然数）を満たすときの光の角周波数 ω_m を共振モードの光角周波数という。ω_m を c、L、n、m で表せ。

この光共振器では、内部光の一部がミラーを透過して出力される。複数の共振モードを適当に重ね合わせることにより電場振幅が周期的に変調されたパルス列が形成される。ここでは簡単のため隣接した３つの共振モードの光角周波数をもつ光電場を重ね合わせて得られる合成波について考察する。

[3] まず分散のない場合（$n = 1$）を扱う。隣接する共振モード３本を外部に取り出したときの平面波の合成を考える。空間のある点におけるそれぞれの電場成分の時間依存性が、$E_{m-1}(t) = (1/2)E_0 \cos\omega_{m-1}t$、$E_m(t) = E_0 \cos\omega_m t$、$E_{m+1}(t) = (1/2)E_0 \cos\omega_{m+1}t$ であるとき、合成電場 $E(t) = E_{m-1}(t) + E_m(t) + E_{m+1}(t)$ は包絡線 $A(t)$ と搬送波 $\cos\omega_m t$ との積として書けることを示し、$A(t)$ の概略を図示せよ。また包絡線 $A(t)$ が極大となる時間間隔を求めよ。

[4] ここからは分散がある場合（n が ω 依存性を有する）を考える。扱う波長域で群速度 $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ が一定、すなわち波数が $k = k_0 + \dfrac{\omega}{v_g}$（$k_0$ は定数）と書けるとする。このとき n を c、k_0、ω、v_g で表せ。

[5] この条件のもとで、共振モードの光角周波数 ω_m は、$\omega_m = \omega_0 + m\,\omega_{rep}$（$m$ は自然数）の形で書けることを示せ。

[6] 縦モードの光角周波数が上記のように $\omega_m = \omega_0 + m\,\omega_{rep}$ と書けるとき、３つの隣接する共振モードの光角周波数をもつ平面波 $E_{m-1}(t) = (1/2)E_0 \cos\omega_{m-1}t$、$E_m(t) = E_0 \cos\omega_m t$、$E_{m+1}(t) = (1/2)E_0 \cos\omega_{m+1}t$ の合成電場がどうなるか考える。電場包絡線のとなりあう極大間の時間間隔を求め、物理的意味を述べよ。

[7] 包絡線の i 番目の極大時刻における搬送波の位相を ϕ_i とおく。包絡線の極大時刻ごとの位相差 $\Delta\phi = |\phi_{i+1} - \phi_i|$ を ω_0 と ω_{rep} で表せ。ただし 2π の整数倍を無視せよ。また $\Delta\phi$ は分散があることにより群速度と位相速度が異なるために生じることを示せ。

第4問

シリコン結晶によるX線（波長1.5 Å）の回折に関する以下の設問に答えよ。なお、数値を含む設問には有効数字2桁で答え、必要ならば下記の値を用いても良い。

プランク定数：6.63×10^{-34} J·s

光速：3.0×10^{8} m/s

ボルツマン定数：1.38×10^{-23} J/K

素電荷：1.60×10^{-19} C

中性子の質量：1.67×10^{-27} kg

[1] 用いたX線のエネルギーは何eVか答えよ。

[2] この実験を同じ波長の中性子線を用いて行いたい。このとき、中性子の運動エネルギーは温度換算で何Kにすれば良いか答えよ。

[3] 互いに直交する基本並進ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ （$|\boldsymbol{a}_1| = |\boldsymbol{a}_2| = |\boldsymbol{a}_3| = a$）で与えられる結晶における互いに平行な等間隔の結晶面群による回折を考える。一つの結晶面上に原点を置き、隣接する結晶面が図1に示すように $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を切るとき、h, k, ℓ をこの結晶面のミラー指数、その結晶面を $(hk\ell)$ 面と言う。$(hk\ell)$ 面の結晶面間隔 $d(hk\ell)$ を求めよ。ただし、$(hk\ell)$ 面と逆格子ベクトル $\boldsymbol{G} = h\boldsymbol{b}_1 + k\boldsymbol{b}_2 + \ell\boldsymbol{b}_3$ が直交することを用いても良い。ここで、$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は逆格子の基本並進ベクトルである。

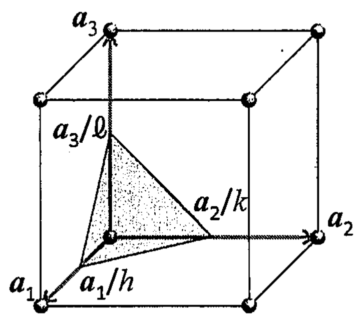


図 1: 結晶面とミラー指数

[4] シリコン結晶はダイヤモンド構造をとり、1辺 a の面心立方格子の各格子点に図2に示すように2つのシリコン原子からなる単位構造を配置することにより構成される。シリコン結晶の $(hk\ell)$ 面からのX線の相対的な回折強度を h, k, ℓ を用いて表せ。なお、単位胞に n 個の同種原子を持つ結晶の構造因子 $F(\boldsymbol{K})$ は、散乱ベクトルを $\boldsymbol{K}$、j 番目の原子の座標を $\boldsymbol{r}_j$ として以下の式で与えられる。ここで、f はシリコンの原子散乱因子であり、その散乱ベクトル依存性は無視する。

$$F(\boldsymbol{K}) = \sum_{j=1}^{n} f\, e^{-i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}_j} \tag{1}$$

[5] 原子散乱因子 f は何によって決まるか答えよ。

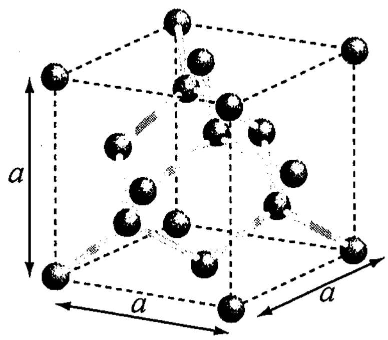


図 2: ダイヤモンド構造

[6] シリコンの格子定数を a=5.43 Åとして、設問 [4] で求めた X 線回折強度がゼロでないものの中で、回折角（入射および回折 X 線のなす角）が 2 番目に小さいもののミラー指数と回折角を求めよ。必要ならば、図 3 の三角関数のグラフを用いて良い。

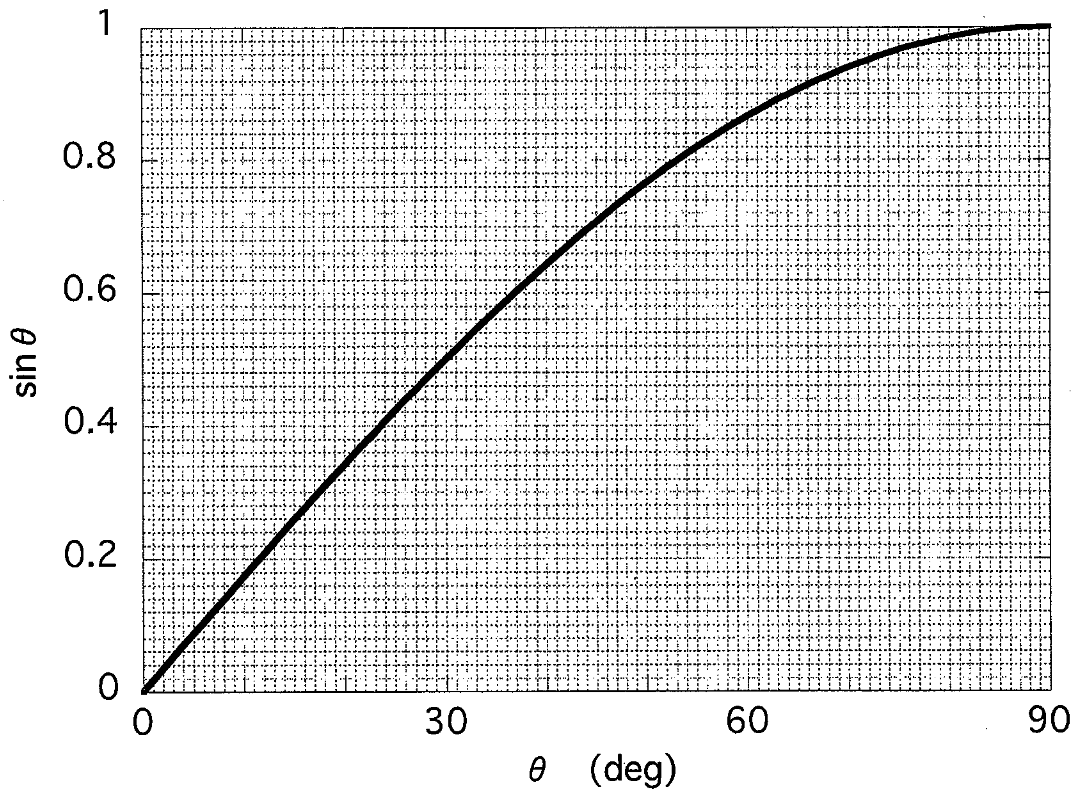


図 3: 正弦関数

[7] 設問 [6] で求めた X 線回折が起きている状況を、エバルトの作図を用いて表せ。ただし、入射 X 線、回折 X 線、および逆格子の方向が半定量的に正しくなるようにすること。