物理工学専攻
入学試験問題

専門科目

（４問出題，３問解答）

平成２０年９月２日（火）　１３：００～１６：００

注意事項

1．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3．出題された４問のうちから３問を選び解答すること。
4．答案用紙が３枚渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6．草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第１問

次のハミルトニアンで記述される１次元的運動をする質量 μ の量子力学的粒子を考える。

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{K}{2}\hat{x}^6 \tag{1}$$

ここで $\hat{p}$ は運動量、 $\hat{x}$ は位置の演算子であり、交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ （$h = 2\pi\hbar$ はプランク定数）を満たす。K は定数である。以下の問いに答えよ。

[1] μ、$\hbar$、及び K の次元を、それぞれエネルギー（J:ジュール）、時間（s:秒）、及び長さ（m:メートル）の３つを用いて表せ。

[2] (1) 式のハミルトニアンの基底状態のエネルギー E_0 と波動関数の空間的拡がり ξ を、次元解析を用いて μ、$\hbar$、K の組み合わせで表現せよ。ただし数係数は問題にしなくとも良い。

[3] [2] の結果を不確定性原理に基づいて導出せよ。

第2問

q を2以上の整数とする。s_1、 s_2 はそれぞれ、1から q までの q 通りの値のうちのいずれかを取る状態変数とする。これら2つの変数の値により、次式で表されるエネルギー

$$E(s_1, s_2) = -J\delta_{s_1,s_2} \tag{1}$$

を持つ系を考える。ここで J はエネルギーの次元をもつ正の定数とし、δ_{s_1,s_2} はクロネッカーのデルタ記号と呼ばれるもので、$s_1 = s_2$ の場合は1、$s_1 \neq s_2$ の場合は0を表すものとする。この系をカノニカル分布で扱い、以下に答えよ。その際、温度を T、ボルツマン定数を k_B で表せ。

[1] 分配関数を求めよ。

[2] ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。

[3] 内部エネルギーの表式を求めよ。特に $q = 2$ の場合について、温度の関数としてグラフに描け。

[4] 比熱の表式を求めよ。特に $q = 2$ の場合について、温度の関数としてグラフに描け。

[5] この系に対して、s_1、s_2 を状態1に揃える外場 h を印加することを考える。外場を印加した場合に系のエネルギーは

$$E(s_1, s_2) = -J\delta_{s_1,s_2} - h(\delta_{s_1,1} + \delta_{s_2,1}) \tag{2}$$

となるものとする。また s_1、s_2 が状態1に揃った度合いを示す秩序変数 m を

$$m = \delta_{s_1,1} + \delta_{s_2,1} - \frac{2}{q} \tag{3}$$

と定義する。秩序変数 m の熱平衡平均値を $\langle m \rangle$ とし、帯磁率 χ を

$$\chi = \left.\frac{\partial \langle m \rangle}{\partial h}\right|_{h=0} \tag{4}$$

と定義する。帯磁率 χ の表式を求めよ。

第3問

電子気体と電磁波との相互作用を古典物理学の範囲で考察してみる。以下の設定に従い、各問に解答せよ。以下で太文字記号はベクトル量を表す。

$\boldsymbol{r}$ を位置ベクトル、t を時刻とし、電子気体の数密度 $n(\boldsymbol{r},t)$ は平均的には n_0 であるとする。1価の正イオンも数密度 n_0 で均一に分布していて、正イオンの運動は無視できるものとする。電子の質量を m、電荷を $-q$ とし、電子気体の流速（個々の電子の速度をアンサンブル平均したもの）を $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$、圧力を $p(\boldsymbol{r},t)$、電場を $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$、磁束密度を $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ とすると、電子気体の運動方程式は

$$mn\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + mn(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -qn(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) - \nabla p \tag{1}$$

と書ける。ナブラ記号 ∇ は $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ という意味である。この電子気体は時間平均をとると移動せず、電場も磁束密度も時間平均は $\boldsymbol{0}$ であり、恒等的に圧力を $p\equiv 0$ と置くのに充分なほど温度が低いとする。各物理量の平均値からの微小な変化分を示すのに記号 δ を付けて表わし、具体的に

$$\begin{aligned} n &= n_0 + \delta n & (2)\\ \boldsymbol{u} &= \delta \boldsymbol{u} & (3)\\ \boldsymbol{E} &= \delta \boldsymbol{E} & (4)\\ \boldsymbol{B} &= \delta \boldsymbol{B} & (5) \end{aligned}$$

と書くことにする。

[1] (2)-(5) 式を (1) 式に代入し、2次以上の微小項（すなわち記号 δ の付いた物理量どうしの積）をすべて無視する。また微小項の微分も微小であるとする。たとえば、(1) 式の左辺第2項は無視できることになる。この近似を導入すると、線形の関係式

$$m\frac{\partial \delta\boldsymbol{u}}{\partial t} = -q\delta\boldsymbol{E} \tag{6}$$

が得られることを示せ。

[2] 上で導入した微小項が単振動することを想定し、複素振幅を使って

$$\delta n = \delta\hat{n}\exp(i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)) \tag{7}$$

$$\delta \boldsymbol{u} = \delta\hat{\boldsymbol{u}}\exp(i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)) \tag{8}$$

$$\delta \boldsymbol{E} = \delta\hat{\boldsymbol{E}}\exp(i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)) \tag{9}$$

$$\delta \boldsymbol{B} = \delta\hat{\boldsymbol{B}}\exp(i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)) \tag{10}$$

と表わすことにする。ここで $\boldsymbol{k}$ は波数ベクトル、ω は角周波数であり、記号 $\hat{}$ はそれが付けられた物理量の複素振幅を表わす。マクスウェル方程式のうち次の二式

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & (11)\\ \nabla\times\boldsymbol{B} &= \mu_0\boldsymbol{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} & (12) \end{aligned}$$

に着目する。μ_0 と ϵ_0 はそれぞれ真空中の透磁率と誘電率である。電流は電子気体の運動により発生しており、電流密度は前問と同じ近似のもと、$\boldsymbol{j} = -qn_0\delta\boldsymbol{u}$ であることに注意せよ。(8)-(12) 式を使い、関係式

$$-\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\delta\hat{\boldsymbol{E}}) = -i\mu_0 qn_0\omega\delta\hat{\boldsymbol{u}} + \frac{\omega^2}{c^2}\delta\hat{\boldsymbol{E}} \tag{13}$$

を導け。ただし c は真空中の光速度を表す。

[3] (13) 式において横波（$\boldsymbol{k}\cdot\delta\hat{\boldsymbol{E}}$=0) を仮定し、(6) 式に (8) 式と (9) 式を代入して、以下の分散関係を導け。

$$\omega^2 = k^2c^2 + \frac{q^2 n_0}{\epsilon_0 m} \qquad (\text{ただし}\, k = |\boldsymbol{k}|\, \text{とする}) \tag{14}$$

必要ならばベクトルの公式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ を用いよ。以後、$\omega_p = \sqrt{\frac{q^2 n_0}{\epsilon_0 m}}$ をプラズマ角周波数と定義する。

[4] 前問の分散関係が成り立つ場合、磁場成分も常には $\delta\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ ではないこと、すなわち電磁波が存在できることを、(11) 式を用いて簡単に示せ。

[5] $\omega > \omega_p$ の範囲で、[3] の分散関係式 (14) から、この波の位相速度 v_p と群速度 v_g を求め、

$$v_g < c < v_p \tag{15}$$

となることを示せ。

[6] 屈折率 $N = c/v_p$ を ω の関数として表わせ。ここでの考察を金属中電子に適用し、光を金属に照射した場合に生じる現象をひとつ挙げて説明せよ。

第４問

磁性体と半導体を混成させた「希薄磁性半導体」は、電荷とスピンの両方の自由度を制御できることで次世代の有用な電子機能材料素子として期待されている。A君は新しい研究室で、この希薄磁性半導体の代表的物質である CdMnTe を作製し、その磁気的性質を調べる実験を行うことにした。まず、この母体結晶の CdTe は、図１のようなセン亜鉛鉱型結晶構造を取ることが知られている。CdMnTe では、Mn は Cd 原子のサイト（位置）に置換され、固溶体をなし、Mn 濃度に応じて $Cd_{1-x}Mn_xTe$ (ただし、x は原子数比) と表記される。Mn 組成がそれほど多くない場合は、格子定数は「ベガード則」* に従う。

まず、この物質の合成から始めた。B教授は、それぞれの組成材料を秤量して、石英アンプルに入れ、これを真空引きした後に、封じ切るよう指導した。使用できる材料は Cd のショット（0.5 g から 1 g 程度の粒状)、Mn は直径 100 μm 程度の粉末粒子状、Te はインゴット（塊）である。石英アンプルに入れるには、およそ 100 g 前後程度の試料を作成するのが適当であると思われた。

*ベガード則：溶媒固有の格子定数と固溶体のそれとの差が、溶質原子濃度に比例することをいう。

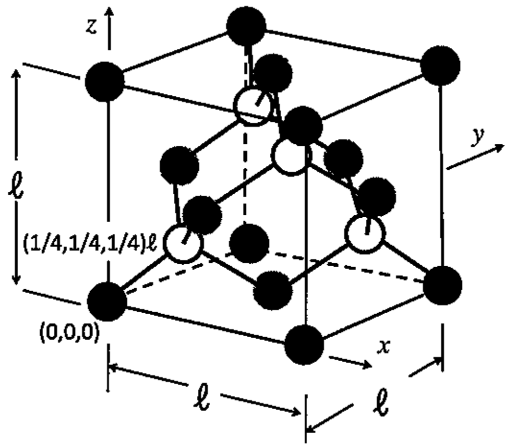

図 1: CdTe 結晶のセン亜鉛鉱型結晶構造と原子の位置。黒及び灰色丸印は Cd 原子、白い丸印は Te 原子サイトを示す。単位胞中には Cd 原子と Te 原子が１個ずつ含まれ、その座標は格子定数 ℓ を用いて (0,0,0) と (1/4,1/4,1/4)ℓ である。灰色丸印は面心位置での Cd 原子サイトを示す。

[1] Mn 組成が 10% の $Cd_{0.9}Mn_{0.1}Te$ を作製することにした。このとき、石英アンプルにおよそ 100 g 前後封入するために、それぞれの組成材料の重さを決めよ。また、その手順も述べよ。その際、Cd はショット（粒）であり粘りがあるため細かく砕くことができない。したがって、不純物が混ざらないように、できれば切ったり細かくしたりはしたくないものとする。Te はインゴット状で、金鎚で好きなように細かく砕くことができるとする。ただし、原子量は、Cd: 112.4、Te: 127.6、Mn: 54.94 であるが、有効数字２桁で計算すれば十分である。

さて、ブリッジマン炉で反応させて、単結晶インゴットが無事できた。物性測定のために、およそ 2 mm×2 mm×10 mm 程度の短冊形の大きさに切りだす。できた結晶の Mn 組成は一様ではないこと（不均一分布）が想定される。そこで、切り出した試料の Mn 組成をできるだけ正確に決めなければならない。研究室には組成を決めるような立派な装置は見当たらない。困っていると、B教授は、「簡単だよ、重さを測ればいいのだよ」という。なるほど、図２のような天秤重量計とビーカーはある。比重を測れば良さそうである。

[2] 図2の実験器具を用いてほぼ2 mm×2 mm×10 mmの大きさの試料の比重をできるだけ精度よく求めるための実験手順（零点設定も含めて）を述べ、試料の比重の値を2桁の精度で決定せよ。ただし、きわめて細い銅線（長さ150 mm程度）、100 cc用のビーカー、ピンセット、純水を用いることができる。一連の測定により、以下の値が得られた：細い銅線の大気中の重さ0.0029 g、銅線も含めた大気中の試料の重さ0.2150 g、水中での試料と銅線を合わせた重さの測定値0.1784 g、純水の比重1.0。測定中の部屋の温度は一定であった。

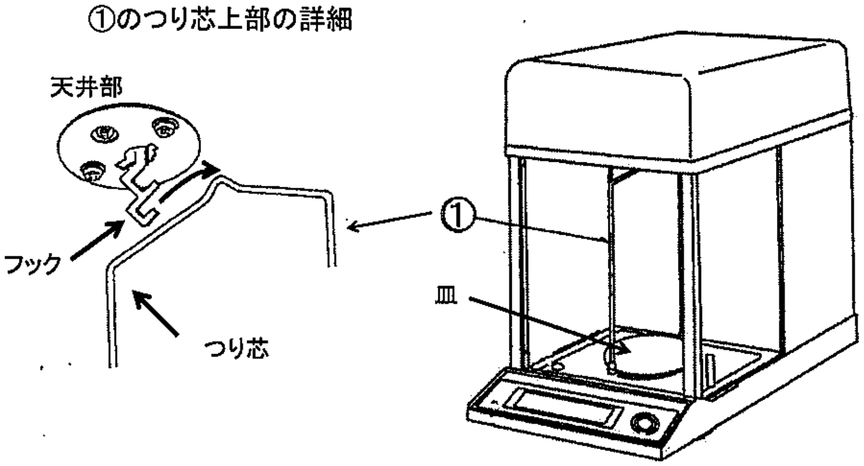

図 2: デジタル天秤。秤量200 g、読み取り限度0.1 mg。①のつり芯と皿は上部のフックで吊り下げられ、通常は、下部の天秤皿に測定する物を載せて計測する。しかし、左上挿絵のように、取り外しても使用できる。また、前面のスイッチを押すことにより零点設定ができる。

[3] 求まった試料の比重からMn組成を決定せよ。ただし、CdTe及びMnTeの単位格子を考えた時の格子定数ℓはそれぞれ、0.64816 nm、0.63460 nmである。アヴォガドロ数は6.022×10^{23}/molである。計算では、近似的に求めることを工夫して行い、結果は1桁の精度でよい。

次に、Mnの組成も決まったので、試料の磁気的性質を調べることにした。この物質では、Mnはそのd殻電子が5/2のスピン量子数を持ち、局在スピンとしてふるまう。Mn濃度が薄い場合は、このd電子のスピンは孤立して（最隣接するサイトのd電子スピンと相互作用しないで）結晶中に存在することが想像される。系の結晶構造（図1）を考慮して次の問いに答えよ。

[4] Mn組成がxであるとき、この結晶でのMnの孤立スピンとして存在できる確率を求め、xで表せ。このとき、最も孤立スピンが多く存在するMn組成濃度x_0を求めよ。

[5] この研究室では、強い磁場を出す装置があり、試料の磁化測定ができる。磁化の測定は、最終的には電気信号に変えて計測しなければならない。試料の磁化を測定するにはどのようにすればよいか、これまで学んだ電磁気学の知識に沿って、思いつく方法を1つ、あるいは、いくつか挙げて説明せよ。