物理工学専攻
入学試験問題

専門科目

（４問出題，３問解答）

平成１９年８月２８日（火）　１３：００～１６：００

注意事項

1．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3．出題された４問のうちから３問を選び解答すること。
4．答案用紙が３枚渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6．草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
8．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

ポテンシャル $U(x) = -V_0\delta(x)$（$V_0 > 0$：定数）のもとで x 軸方向に1次元運動する質量 m の粒子を考える。ただし $\delta(x)$ はデルタ関数とする。このとき V_0 の値によらず、エネルギーが E_0 の束縛状態がただ1つ存在し、その波動関数は

$$\phi_0(x) = \sqrt{C_0}\exp(-C_0|x|) \tag{1}$$

と表せる。ただし C_0 は正の定数である。

[1] $\phi_0(x)$ に対するシュレーディンガー方程式を用いることにより、C_0 および E_0 を m、V_0、$\hbar$ を用いて表せ。ただし $\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったものである。

次に、1次元ポテンシャル $V(x) = -V_0\delta(x-l) - V_0\delta(x+l)$ （$l > 0$：定数）に束縛された粒子の量子状態を考える。そのために、試行関数を $\Psi(x) = N[\phi_0(x-l) + \alpha\phi_0(x+l)]$ として変分法を用いる。ここで N は定数、α は変分パラメータである。以下ではポテンシャル $V(x)$ に束縛された粒子のハミルトニアンを H として、S、J、K を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \phi_0(x-l)\,\phi_0(x+l) \\ J &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \phi_0(x-l)\,H\,\phi_0(x-l) \\ K &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \phi_0(x-l)\,H\,\phi_0(x+l) \end{aligned}$$

[2] $\Psi(x)$ を規格化することにより、N を α、S を用いて表せ。

[3] $\Psi(x)$ に対するエネルギー期待値 E を α、S、J、K を用いて表せ。

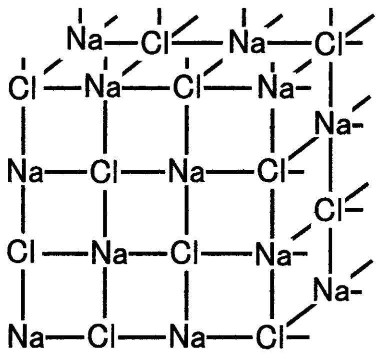
[4] $\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0$ となる α の値を求めよ。さらに $E(\alpha)$ の概形を描け。ただし、$SJ > K$ である。

[5] エネルギー期待値 E が最小となる α の値 α_1 を求め、そのときのエネルギー期待値 E_1 を S、J、K を用いて表せ。さらにそのときの波動関数 $\Psi_1(x)$ を $\phi_0(x-l)$、$\phi_0(x+l)$、S を用いて表せ。

[6] (1) 式を用いて S、J、K を具体的に計算し、エネルギー期待値 E_1 を E_0、C_0、l、V_0 を用いて表せ。

第2問

説明を理解しながら以下の設問 [1] – [8] に答えよ。
CuZn や CuAu のような二元合金は X、Y、2 種類の金属元素を高温で溶融しその後冷却して作る。このような二元合金のできるメカニズムを明らかにするために簡単な模型を考える。元素X、Y は組成比にかかわらず低温の固化した状態で、いずれもある格子定数の単純立方格子の格子点を占めるとする。X、Y を 1：1 の組成比で高温で均一に溶融してからゆっくりと冷却し固化させる。原子 X と X、Y と Y が最近接で隣り合うときの相互作用エネルギーが等しく、そのエネルギーを p、X と Y が最近接で隣り合うときの相互作用エネルギーを q とし、これ以外の相互作用は働かないとする。さらに $p > q$ が満たされて、同種より異種の原子が隣り合う方が相互作用エネルギーが低いとする。絶対零度で実現される基底状態は、相互作用エネルギーをできるだけ低くする結果、X 原子と Y 原子が互いに隣り合いながら互い違いに規則正しく並んだ構造（下図の NaCl 型構造）になると容易に予想できる。



図：NaCl 型結晶構造

[1] 1 格子点あたりの基底状態のエネルギーを求めよ。

基底状態の構造を考慮して、単純立方格子の格子点を 2 つのグループに分け、NaCl 型構造の Na の占める格子点を A 副格子点、Cl の占める格子点を B 副格子点と呼ぶことにする。ここで最近接格子点間の相互作用は A 副格子に属する格子点と B 副格子に属する格子点の間だけに働き、A 副格子点同士、B 副格子点同士の間には働いていないことに注意しよう。

[2] 格子点 i が X 原子で占められているときを $S_i = 1$、Y 原子で占められているときを $S_i = -1$ とする変数 S_i を使うと、この二元合金模型のハミルトニアンが、

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} (J S_i S_j + K) \tag{1}$$

という形（各格子点の変数 S_i が最近接格子点の S_j と相互作用する形）に書けることを示し、J と K を p、q を用いてあらわせ。ここで、$\langle i,j \rangle$ に関する和は全ての最近接格子点の組に対してとるものとする。

X と Y の組成比が 1：1 であるから、すべての格子点について S_i の和をとったものはゼロとなる。したがって A 副格子に属する格子点 j での平均値を $\langle S_j \rangle = n$ とするならば、B 副格子に属する格子点 i での平均値は $\langle S_i \rangle = -n$ という関係が、どんな温度であっても成り立つと考えてよい。
ここで副格子に関わらず任意の格子点 i について、S_i が S_j から受ける相互作用を平均値 $\langle S_j \rangle$ から受けるものに置き換え、そのまわりのゆらぎを無視する近似を考える。

[3] 平均値からのゆらぎを $\delta S_i \equiv S_i - \langle S_i \rangle$ と表わすことにする。$S_i = \langle S_i \rangle + \delta S_i$ であることに注意し、ゆらぎ δS_i についての２次以上の項を無視すると、式 (1) で与えられるハミルトニアンは

$$H = 6nJ\left[\sum_i S_i - \sum_j S_j\right] + 3N\ (n^2J + K) \tag{2}$$

と近似できることを導出法を明記して示せ。ただし (2) 式では格子点 i は B 副格子に属し、j は A 副格子に属している。また N は全格子点の数であり、系には周期的境界条件が課されているとする。

[4] n を定数と考えて、近似ハミルトニアン (2) 式から温度 T のときの分配関数 Z を J、K、n、k_{B}、T、N を用いて求めよ。ただし k_{B} はボルツマン定数である。

[5] A 副格子点での S_j の平均値 $n_{\mathrm{A}} = \langle S_j \rangle$ を求める表式を与え、[4] の結果を用いて n_{A} を n の関数として与えよ。また B 副格子点での平均値 $n_{\mathrm{B}} = \langle S_i \rangle$ も求めよ。

[6] n に関する自己無撞着条件を求めよ。

[7] [6] の結果から、系を高温から冷却していったときに n の温度依存性が特異的となる温度 T_c を求めよ。また [6] で求めた条件式を T_c 近傍で解いて n の温度変化の大体の様子を図示しその特徴を論ぜよ。なお必要なら、$\log(1+x) \simeq x - x^2/2$、$\exp(x) \simeq 1 + x + x^2/2$、$\sinh(x) \simeq x + x^3/6$、$\cosh(x) \simeq 1 + x^2/2$、$\tanh(x) \simeq x - x^3/3$ などの展開近似式を使っても良い。

[8] 以上の結果をもとに、二元合金で起きる現象を説明せよ。

第3問

ある結晶軸（c 軸）を含む平面内に偏光した光に対する屈折率 n_e と、c 軸に直交する平面内に偏光した光に対する屈折率 n_o が異なる、光学的異方性をもつ結晶を考える。ここでは $n_\mathrm{o} > n_\mathrm{e}$ とする。図 1 のように、c 軸を z 方向に向けて厚さ d の薄い結晶板を置き、z 軸から 45° 傾いた偏光面を持つ波長 λ の単色光を結晶板に垂直に入射させた。

[1] 結晶板を透過した後の偏光の z 成分と x 成分の位相差を求めよ。

[2] 結晶板を透過した後、偏光面が 90° 回転する結晶板の厚みを求めよ。

[3] 図 1 の配置で、結晶板の後に入射光と同じ偏光面を持つ偏光子を置く。偏光子とは一定の偏光面内で振動する偏光成分のみを透過させる素子である。入射光の振幅を 1 とし、後方の偏光子を透過した後の光の強度の d 依存性を求めよ。

[4] [3] の配置で、結晶板を図 2 のように単体の結晶板と 2 枚の楔型結晶を密着した素子に置き換える。単体の結晶板の c 軸を紙面と直交する z 方向とし、楔形素子の c 軸を x 方向とする。単体の結晶板の厚みを d_1 とし、楔形素子の厚み d_2 は一方の楔形結晶を出し入れすることにより精密に変えることができる。この配置を用いて $n_\mathrm{o} - n_\mathrm{e}$ を精密に決める方法について述べよ。

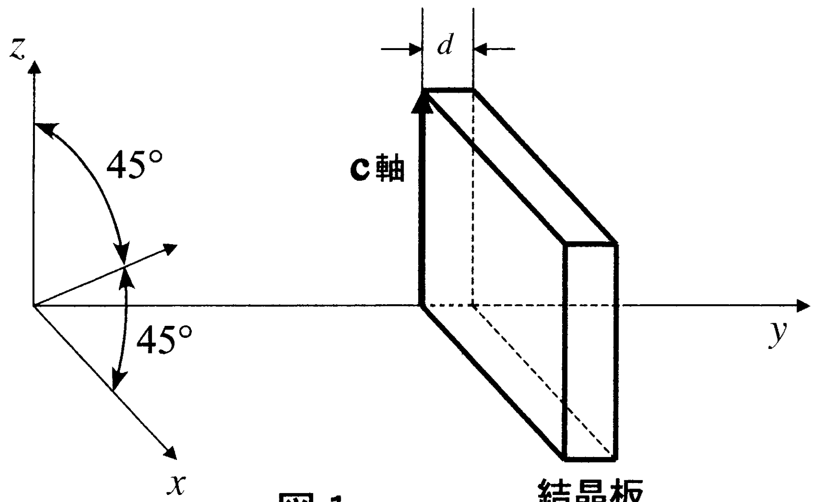


図 1

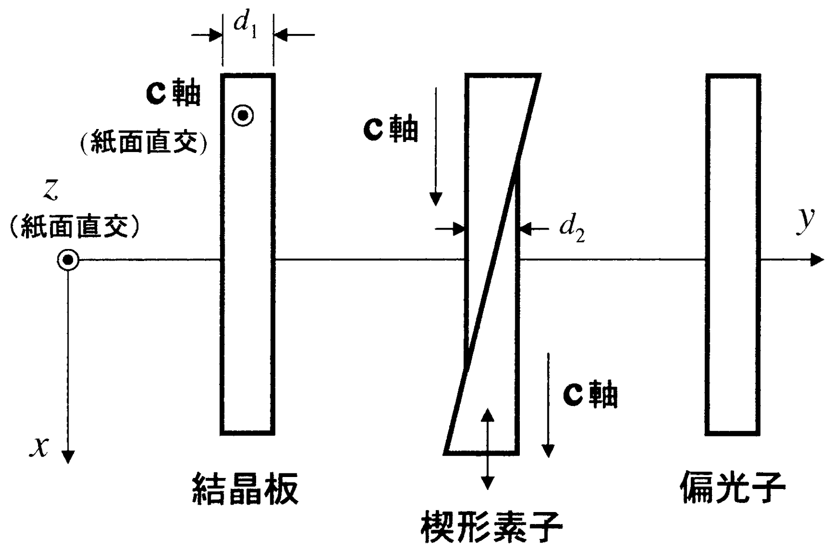


図 2

第4問

光学用干渉フィルターは、図のように比誘電率が異なる透明誘電体膜を周期的に積層した構造をしている。これに関して、以下の問に答えよ。真空中の光速を c とし、比誘電率 ε（>0）は光の角周波数によらず、屈折率 n との間には $n=\sqrt{\varepsilon}$ の関係があり、フィルターは十分厚く端の効果は無視してよいとする。

[1] 一般に、位相速度 v で伝播する光の、時刻 t 場所 x での電場 $E(x,t)$ は、波動方程式

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2}$$

に従い、角周波数 ω の定常解は $E(x,t)=E(x)e^{-i\omega t}$ と書ける。真空中では、光の角周波数 ω と波数 k（$|k|=2\pi/\lambda$：λ は波長）の間にはどのような関係があるか。また、比誘電率 ε の誘電体媒質中で $E(x)$ が満たすべき微分方程式を示せ。

[2] 図のように、比誘電率が周期 a で場所 x に依存するときは、一般に $E(x)$ は a を周期とする周期関数 $u_k(x)$ を用いて、$E_k(x)=e^{ikx}u_k(x)$ と表せる。この定理を何というか。

[3] 一般に、a を周期とする周期関数は、$u_k(x)=\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_m e^{iG_m x}$ のようにフーリエ展開できる。G_m を整数 m と a で表せ。

[4] 簡単のため、周期 a で場所 x に依存する比誘電率 $\varepsilon(x)$ を

$$\varepsilon(x)=\varepsilon_0+2\varepsilon_1\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)=\varepsilon_0+\varepsilon_1\left(e^{i\frac{2\pi}{a}x}+e^{-i\frac{2\pi}{a}x}\right)$$

のように近似できるとする。ここで、$\varepsilon_0>0$、$\varepsilon_1>0$、$\varepsilon_0\gg\varepsilon_1$ とする。$E(x)$ に関する微分方程式より、$u_k(x)$ のフーリエ係数 b_m の間に

$$b_m=-\omega^2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\frac{(b_{m-1}+b_{m+1})}{\left\{\omega^2-c^2\left(k+G_m\right)^2/\varepsilon_0\right\}} \tag{1}$$

なる関係が成立すること示せ。

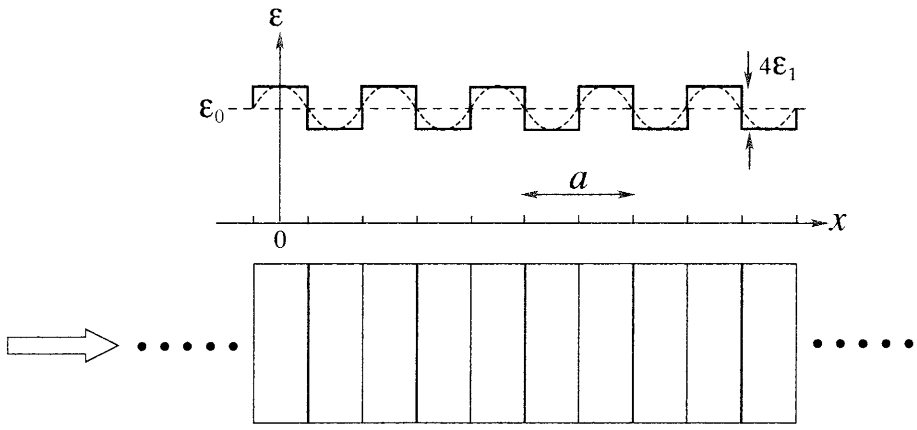
[5] (1) 式において、$m=0$ と $m=-1$ の場合を考え、$\omega\approx ck/\sqrt{\varepsilon_0}$、$k\approx\pi/a$ ならば、b_0 と b_{-1} 以外の b_m は無視して良いことを示せ。

[6] このとき、b_0 と b_{-1} 以外の b_m を 0 とすると、ω と k は (2) 式のような行列式を満たす。δ を求めよ。

$$\begin{vmatrix}\left\{1-c^2k^2/(\varepsilon_0\omega^2)\right\} & \delta \\ \delta & \left\{1-c^2\left(k-\frac{2\pi}{a}\right)^2/(\varepsilon_0\omega^2)\right\}\end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

[7] $k\approx\pi/a$ で (2) 式がどうなるか考え、角周波数 ω が $(\pi c/a)/\sqrt{\varepsilon_0+\varepsilon_1}<\omega<(\pi c/a)/\sqrt{\varepsilon_0-\varepsilon_1}$ の範囲にある光はこのフィルターを透過できず反射されることを示せ。また、その様子を表す ω と k の関係（分散関係）のグラフの概形を示せ。

[8] 物質波である電子でもこれと類似の現象が起こる。どのような現象か。



図： 光学用干渉フィルター