物理工学専攻
入学試験問題

専門科目

（４問出題，３問解答）

平成１８年８月２９日（火）　１３：００～１６：００

注意事項

１．試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
２．本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
３．出題された４問のうちから３問を選び解答すること。
４．答案用紙が３枚渡されるから，１題ごとに必ず１枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
５．答案用紙上方の指定された箇所に，その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
６．草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
７．解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする。
８．答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること。

第1問

図1に示すような2準位系の時間変化について考える。ただし、$|a\rangle$、$|b\rangle$ はエネルギー固有状態（固有値はそれぞれ $\hbar\omega_a$、$\hbar\omega_b$）、$\omega_b - \omega_a = \omega$、$\langle a|a\rangle = \langle b|b\rangle = 1$、$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle = 0$ である。初期状態 $(|\psi(t=0)\rangle)$ は状態 $|a\rangle$ であるとして以下の問いに答えよ。

[1] この系に $t=0$ で、時間依存するポテンシャル $U(t) = -\mu(|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|)\cos\nu t$ が加えられたとする。μ は時間に依存しない定数である。このとき、$t \geq 0$ での系のハミルトニアンは以下のようになる。

$$H = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| - \mu(|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|)\cos\nu t$$

$t \geq 0$ での系のハミルトニアンの行列要素 $H_{ij} = \langle i|H|j\rangle \quad (i, j = a, b)$ を書け。

[2] $t < 0$ での系のハミルトニアンを H_0 とし、$t \geq 0$ での系の状態 $|\psi(t)\rangle$ を $|\psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t/\hbar}|\phi(t)\rangle$ とすると、$|\phi(t)\rangle$ に関する時間発展の方程式は

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle = V(t)|\phi(t)\rangle \tag{1}$$

となることを示せ。ここで、

$$V(t) = -\frac{\mu}{2}\left[e^{-i(\omega-\nu)t} + e^{-i(\omega+\nu)t}\right]|a\rangle\langle b| - \frac{\mu}{2}\left[e^{i(\omega-\nu)t} + e^{i(\omega+\nu)t}\right]|b\rangle\langle a|$$

である。

[3] 式(1)を解くと、形式解は

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle = &\ |\phi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' V(t')|\phi(t')\rangle \\ = &\ |\phi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1 V(t_1)|\phi(0)\rangle + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2)|\phi(0)\rangle + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

となり、さらに時間順序積 $\mathcal{T}$ を用いて

$$|\phi(t)\rangle = \mathcal{T}\left[1 - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' V(t') + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' V(t')\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' V(t')\right)^3 + \cdots\right]|\phi(0)\rangle \tag{3}$$

と書ける。

$\omega = \nu$ とし、$V(t)$ 中の $e^{\pm i(\omega+\nu)t}$ の項を無視すると、$V(t)$ は時間依存しなくなり、式(3)の時間順序積 $\mathcal{T}$ が無視できるようになる。このとき、式(1)を解いて $|\phi(t)\rangle$ を求めよ。

[4] [3]の結果を用いて、時刻 t での系の状態 $|\psi(t)\rangle$ を、$|a\rangle$、$|b\rangle$ を用いて表せ。

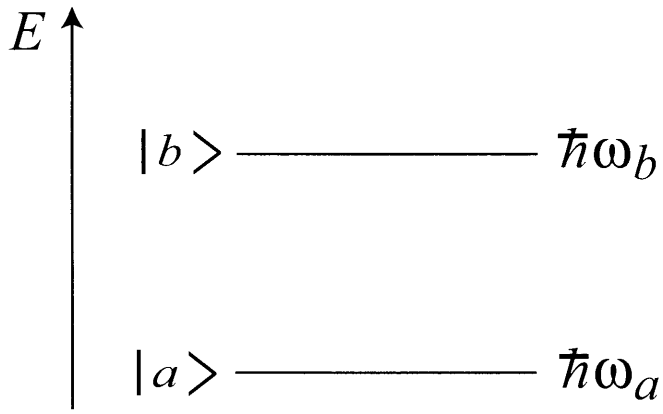

図 1: 2 準位系

第2問

大きさ μ の電気双極子モーメントを持つ N 個の粒子からなる系を考える。粒子の位置は固定されているが、回転は自由で、電気双極子間の相互作用は無視できるとする。系の温度を T、この系にかかっている電場を $\vec{E}$ （電場の強さ $E = |\vec{E}|$) として、以下の問いに答えよ。ただし、系の体積 V は一定とし、真空の誘電率を ε_0、ボルツマン定数を k_B とする。

[1] 電場の向きと i 番目の粒子の電気双極子モーメント $\vec{\mu}_i$ ($|\vec{\mu}_i| = \mu$) の向きのなす角を θ_i として系の全エネルギー $\mathcal{E}$ を求めよ。

[2] この系の分配関数 Z が次式で与えられることを示せ。

$$Z = \left(4\pi \frac{\sinh(\beta\mu E)}{\beta\mu E}\right)^N$$

ただし、$\beta = \frac{1}{k_\mathrm{B}T}$ とする。

[3] この系の内部エネルギー U を求めよ。また、この系の電気分極 $\vec{\mu}_\mathrm{total} = \sum_{i=1}^N \vec{\mu}_i$ を考える。そのアンサンブル平均 $\vec{P} =< \vec{\mu}_\mathrm{total} >$ の大きさ P と U の間の関係を用いて、P を求めよ。

ヒント：$U =< \mathcal{E} >$ である。<> はアンサンブル平均を表す。

[4] 系の電気感受率 $\chi = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_T$ を求めよ。ただし、弱い電場の極限 ($E \to 0$) をとり、電場に依らない形で求めよ。

[5] $\mathcal{E}$ のゆらぎの二乗平均は、次式で与えられることを示せ。

$$< (\mathcal{E} - < \mathcal{E} >)^2 >= -\left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_E$$

[6] 上の結果を用い、電気分極 $\vec{\mu}_\mathrm{total}$ のゆらぎ $\delta\vec{\mu}_\mathrm{total} = \vec{\mu}_\mathrm{total} - < \vec{\mu}_\mathrm{total} >$ の二乗平均 $< |\delta\vec{\mu}_\mathrm{total}|^2 >$ を、電場の弱い極限で電気感受率 χ を用いて表せ。

第3問

[1] 真空内（誘電率 ε_0）の平面上に、次式で示される電荷密度で電荷が分布しているものとする。

$$\rho(x,y,z) = A\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right)\delta(z) \tag{1}$$

ただし、$a>0$ とし、$\delta(z)$ はデルタ関数である。SI 単位系を用いること。

[1.1] $z>0$ の領域で静電ポテンシャル $\phi(x,y,z)$ の満たす方程式と、$z=0$ での境界条件を書け。

[1.2] $\phi(x,y,z) = B\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}y\right)\exp(-Cz)$ とおいて [1.1] の方程式を解き、$z>0$ の領域での $\phi(x,y,z)$ と単位電荷 q_0 の感ずる静電気力の z 成分 $F_z(x,y,z)$ を求めよ。

[2] 真空内に単層の NaCl 結晶があり、その電荷密度は上記の式 (1) で $A=16q_0/a^2$ としたものと近似できるとする。ただし、a は NaCl の格子定数で 5.6×10^{-10} m とする。その面から z だけ離れた位置に置かれた点電荷（単位電荷 q_0）に働く力の面垂直方向成分を測定できるとする。以下の問いに有効数字 1 桁で答えよ。

[2.1] 点電荷を面に平行に走査した際、単層 NaCl 結晶により受ける力の面垂直方向成分の変動幅は、点電荷が結晶面から離れるにつれて減少する。その減衰距離（変動幅が $1/e$ になる距離、$e\cong2.7$ は自然対数の底）を求めよ。

[2.2] 結晶面から距離 a だけ離れた位置で点電荷を面に平行に走査するとして、単層 NaCl 結晶により受ける力の面垂直方向成分の変動幅を求めよ。ただし、a だけ離れた 2 個の電子間に働く力は 7.3×10^{-10} N とし、$\exp(-2\pi\sqrt{2})\cong1.4\times10^{-4}$ を使ってよい。

第4問

金属の性質を理解する最も簡単なモデルとして、一辺 L の十分に大きい立方体中に閉じ込められた自由電子を考える。以下の問いに答えよ。

[1] この電子（質量 m）のシュレディンガー方程式を周期的境界条件の下に解き、エネルギーの値が E 以下の量子状態の数を、スピンの自由度も考慮して求めよ。また、この電子の単位体積、単位エネルギー当りの量子状態の数（状態密度）$g(E)$ を求めよ。

[2] 立方体中に多数の電子が温度 T の熱平衡状態にあるとき、エネルギー E を持つ量子状態が電子により占有されている確率 $f(E)$ は、フェルミ・ディラック分布

$$f(E) = \frac{1}{\exp[(E-\mu(T))/(k_{\mathrm{B}}T)]+1}$$

に従う。ここで $\mu(T)$ は温度 T における化学ポテンシャル、$\mu(0)=E_{\mathrm{F}}$ はフェルミエネルギーで、k_{B} はボルツマン定数である。$k_{\mathrm{B}}T \ll E_{\mathrm{F}}$ である場合を "低温" と呼ぶ。低温における $f(E)$ の概形を図示せよ。

[3] 絶対零度で電子密度 N の金属に磁束密度 B の磁場を印加した。磁場によるゼーマンエネルギーが化学ポテンシャルよりも十分小さい場合に、単位体積当りの磁化の大きさ M を求めよ。ただし、電子の磁気モーメントを μ_{B} とし、電子の運動によるローレンツ力の影響は無視する。

[4] $F(0)=0$ となる任意の関数 $F(E)$ に対して、その一次微分 $F'(E)$ と二次微分 $F''(E)$ を含んだ次の近似式が低温で成立する。

$$\int_0^\infty f(E)F'(E)dE \fallingdotseq F(\mu(T)) + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 F''(\mu(T))$$

電子密度が

$$N = \int_0^\infty f(E)g(E)dE$$

であることを使って、化学ポテンシャル $\mu(T)$ が、低温で温度にどのように依存するか示せ。

[5] 電子が持つ内部エネルギーは

$$U = \int_0^\infty E f(E)g(E)dE$$

である。[4] の近似式を利用して、低温における電子比熱を求めよ。