

物理工学専攻 入学試験問題

専門科目

(7問出題, 4問解答)

平成15年9月2日(火) 13:00~16:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 出題された7問のうちから4問を選び解答すること。
4. 答案用紙が4枚渡されるから, 1題ごとに必ず1枚の答案用紙を使用すること。止むを得ぬときは答案用紙の裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙上方の指定された箇所に, その用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと。
7. 解答に関係のない記号, 符号などを記入した答案は無効とする。
8. 答案用紙および問題冊子は持ち帰らないこと。

受験番号	No.
------	-----

上欄に受験番号を記入すること。

第 1 問

本体の質量 m_0 のロケットが、質量 M_0 の燃料を搭載して慣性系に静止している (総質量は $m_0 + M_0$)。ロケットは燃料を、相対速さ V (ロケットに対して) で後方に噴射し、初速 0 から前進する。このとき以下の間に答えよ。

- [1] このロケットが時刻 $t=0$ より単位時間あたり一定質量 μ の燃料を噴射する場合を考える。時刻 t における残りの燃料の質量を $M(t)$ 、ロケットの速度を $v(t)$ とする。ロケットは微小な時間 Δt の間に燃料 $\mu\Delta t$ を噴射する。この噴射の前後で全系の運動量が保存することから、ロケットの運動方程式が

$$\{m_0 + M(t)\} \frac{dv(t)}{dt} = V\mu$$

で与えられることを示せ。

- [2] 上の運動方程式を解いて、噴射開始から時間 t 経過後のロケットの速度ならびに最終速度を求めよ。
- [3] 二段式ロケットでは一段目の燃料を噴射し終えた直後に一段目本体を切り離し、二段目の燃料を噴射する。一段目および二段目それぞれの燃料の質量を M_1 、 M_2 、本体の質量を m_1 、 m_2 としたとき、最終速度を求めよ。また、この二段式ロケットの最終速度は、本体質量 $m_1 + m_2$ 、燃料質量 $M_1 + M_2$ の一段式ロケットの最終速度より大きいことを示せ。ただし、切り離し時に加速はないものとする。また、いずれの場合も単位時間あたりに噴射される燃料質量は μ とする。
- [4] 問 [1] では燃料を連続的に噴射することを考えたが、ここでは仮に燃料のすべてを一体として、ロケットから後方に射出する場合を考える。このとき射出後のロケット本体に対する燃料の相対速さを V とする。問 [2] で得られた結果と比較し、本体質量に対する燃料質量の比が大きい場合について、連続的に噴射する方が最大到達速度が大きくなることを示せ。
- [5] 次に一段式のロケットを一定加速度 α で前進させる場合を考える。この時必要な単位時間あたりの噴射量を時間の関数として求めよ。

第2問

図1のような z 軸を中心軸とする円電流の周りの磁場は、電気双極子の作る電場に似ている。そこで、電荷が電場を発生することの類推から、仮想的に磁荷を導入し、これが磁場を発生すると考えることができる。このことを確認するため、以下の問に答えよ。真空の透磁率を μ_0 とする。

- [1] 半径 a の定常円電流 I の中心軸上の磁束密度を z の関数として求めよ。ただし、円電流の中心を原点 O とする。また、必要ならば次のビオ-サバルの法則を用いよ。

ビオ-サバルの法則

定常電流 I の流れる導線の r' における微小線素 ds が r につくる磁束密度 $d\mathbf{B}$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned}d\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I ds}{4\pi R^2} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}' \\ R &= |\mathbf{R}|\end{aligned}$$

- [2] 大きさ q_m の磁荷から距離 r のところの磁束密度が $B = (\mu_0/4\pi)q_m/r^2$ で与えられることを用いて、図2のように $z = +d/2$ 、 $-d/2$ におかれた磁荷 $+q_m$ 、 $-q_m$ からなる磁気双極子の発生する z 軸上の磁束密度を求めよ。
- [3] 電気双極子モーメントとの類推から $q_m d$ は磁気双極子モーメントと呼ばれる。 $z \gg a$ かつ $z \gg d$ において、磁気双極子の発生する磁束密度と円電流の発生する磁束密度の z 軸上での z 依存性が一致することを確認せよ。磁束密度が一致するための磁気双極子モーメントと円電流 I の関係を示せ。

一般に磁化 \mathbf{M} は、その原因を仮想的な電流（磁化電流）に求めることができる。このとき、磁化電流密度 \mathbf{j}_m と磁化 \mathbf{M} の間には $\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ の関係がある。一方、磁場 \mathbf{H} は $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$ で定義される。また、真電流密度を \mathbf{j} として $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \mathbf{j}_m)$ が成立する。以上を用いて、磁性体周辺（内部を含む）の磁場、磁束密度の分布について以下の問に答えよ。

- [4] 外部磁場ゼロの下で、図3のような軸方向にほぼ一様に磁化した（磁化 \mathbf{M} ）細長い円柱状の磁性体を考える。磁化電流密度 \mathbf{j}_m の分布を向きを含めて図示せよ。
- [5] 図3の磁性体周辺（内部を含む）の磁束密度 \mathbf{B} の様子を図示せよ。
- [6] 図3の磁性体周辺（内部を含む）の磁場 \mathbf{H} は、両端に正負の磁荷があるときの磁場と同様である。 \mathbf{H} の様子を図示せよ。
- [7] 次に、外部磁場ゼロの下で図4のようなほぼ一様に磁化した（磁化 \mathbf{M} ）円盤状の磁性体を考える。磁化電流密度 \mathbf{j}_m 、磁束密度 \mathbf{B} 、磁場 \mathbf{H} を[4][5][6]と同様に図示せよ。また、この磁性体の半径が厚みに比べて十分大きいとき、その中心付近での磁束密度と磁場の分布の特徴について述べよ。

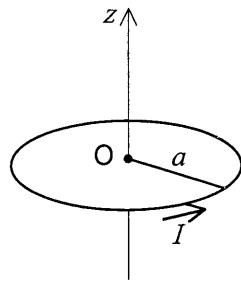


図 1

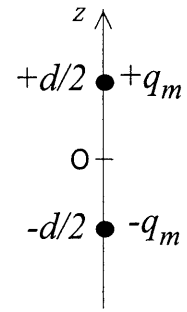


図 2

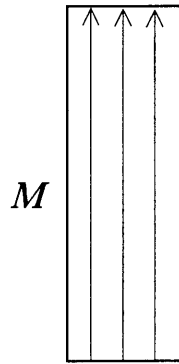


図 3

円柱の中心軸を含む断面図

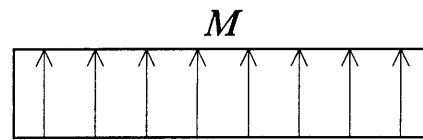


図 4

円盤の中心軸を含む断面図

第3問

図1のような軸対称のポテンシャルに束縛された2次元電子系を考えよう。ただし、電子間のクーロン斥力は特に注意しないかぎり無視できるものとする。(m は電子の質量、 e は電荷である。)

束縛ポテンシャルを $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ とし、定常状態の電子系について考察を進めよう ($\mathbf{r} = (x, y)$)。

[1] ハミルトニアン H はつぎのような2つの調和振動子 H_x と H_y の和となる。

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + V(\mathbf{r}) = H_x + H_y$$

$$H_x = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad H_y = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$$

このとき1粒子状態の波動関数 $\varphi(\mathbf{r})$ は $\varphi(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)$ と変数分離型にかけることに注意して、1粒子のエネルギー準位 E に関する以下の問に答えよ。

[1-1] $H_x X = E_x X$, $H_y Y = E_y Y$ のとき1粒子エネルギー E ($H\varphi = E\varphi$) を E_x, E_y を用いてかけ。

[1-2] 固有方程式 $H_x X = E_x X$ をみたく固有関数 X と固有値 E_x を求めよう。

(a) $D_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{\partial}{\partial x}$, $D_x^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{\partial}{\partial x}$ として

$[D_x, D_x^\dagger] = D_x D_x^\dagger - D_x^\dagger D_x = 1$ を示せ。

($f(x)$ を x の任意の関数として、 $[D_x, D_x^\dagger]f = f$ であることを示せばよい。)

(b) $H_x = \hbar\omega(D_x^\dagger D_x + \frac{1}{2})$ を示せ。

(c) ここで $D_x X_0(x) = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} dx |X_0(x)|^2 = 1$ により定められる $X_0(x)$ を求めよ。さらに $X_0(x)$ は H_x の固有状態であることを示せ。($\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$ である。)

なお、上の(a)-(b)を用いると H_x の規格直交化された固有状態は

$$X_{n_x}(x) = \frac{1}{\sqrt{n_x!}} (D_x^\dagger)^{n_x} X_0(x), \quad (n_x = 0, 1, 2, \dots)$$

であたえられ、その固有エネルギーは $E_{n_x} = \hbar\omega(n_x + \frac{1}{2})$ となることが知られている。

[1-3] H_y についても同様に考え固有関数 $Y_{n_y}(y)$, 固有値 $E_{n_y} = \hbar\omega(n_y + \frac{1}{2})$, $n_y = 0, 1, 2, \dots$ としたとき全系の1粒子エネルギーは2つの非負の整数 (n_x, n_y) で指定される。この全系の1粒子エネルギー $E_{(n_x, n_y)}$ と、そのエネルギーを持つ状態の縮退度を求めよ。

[2] x 方向に電場 \mathcal{E} をかけたときの1粒子エネルギー E を求めよ。縮退度は変化するか。

(ヒント $x = x' + a$ の変数変換を用いよ。(a はある定数))

[3] このポテンシャルに電子が何個か束縛されているときの多電子系の電子状態を電子のスピンを考慮して考えよう。

[3-1] パウリの排他律とは何か述べよ。

[3-2] 4個の電子が(電場のないとき)このポテンシャルに束縛されている。この系の基底状態の縮退度を求めよ。

[3-3] 電子間のクーロン相互作用を考慮し、それが束縛ポテンシャルに対して十分弱いとみなせるとして扱い、新しい基底状態をフント則に基づき考察しよう。

(a) フント則とは何か述べよ。

(b) フント則を適用して新しい基底状態の縮退度を求めよ。

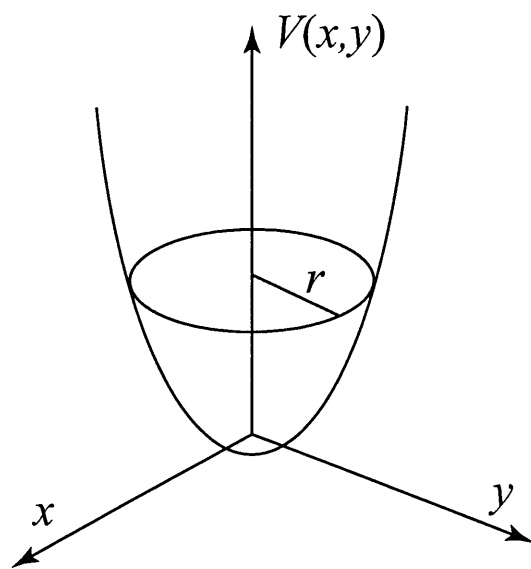
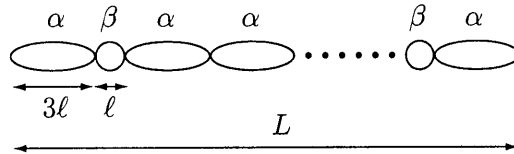


图 1

第4問

N 個のモノマー (単量体) が一直線上に整列した鎖状分子を考える。各モノマーは、それぞれ独立に α 、 β の2つの状態のいずれかを取り得るものとする。それぞれのモノマーは状態 α では長さ 3ℓ 、エネルギー E_α 、一方、状態 β では長さ ℓ 、エネルギー E_β を持つ。ボルツマン定数を k_B として以下の間に答えよ。



- [1] N 個のモノマーのうち、 α 状態をとるものの数を N_α 、 β 状態をとるものの数を N_β とする。この時、全体の長さ L および全エネルギー E を N_α と N_β を用いて表せ。
- [2] この鎖状分子の両端に張力 τ を加える。この系が温度 T の熱浴に接し熱平衡状態にあるときのモノマー 1 個あたりの自由エネルギーを温度 T と張力 τ の関数として表せ。
- [3] 温度 T 、張力 τ のもとでの分子全体の長さの期待値 $\langle L \rangle$ を求めよ。特に、 $\tau\ell$ が $k_B T$ に比べて十分小さい場合、この鎖状分子はフックの法則 ($\tau = \kappa(\langle L \rangle - L_0)$) に従うことを示せ。ただし L_0 は張力がない時の長さ (自然長)、また κ はばね定数である。
- [4] モノマー数 N の分子の全体の長さが L となる確率を $P_N(L)$ と書くことにする。以下、張力 $\tau = 0$ 、さらに、 $E_\alpha = E_\beta$ の場合の確率分布関数 $P_N(L)$ について考える。
- [4-1] モノマー数が $N + 1$ 個の場合の確率分布関数 $P_{N+1}(L)$ をモノマー数が N 個の場合の分布関数 $P_N(L)$ を用いて表わす式 (漸化式) を導け。
- [4-2] 次式により $P_N(L)$ の L に関するフーリエ変換 $\tilde{P}_N(k)$ を導入する。

$$P_N(L) \equiv \frac{\ell}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk e^{-ikL} \tilde{P}_N(k)$$

$\tilde{P}_N(k)$ に関する漸化式を導き、それを解いて $\tilde{P}_N(k)$ を求めよ。ただし $\tilde{P}_0(k) = 1$ である。

- [4-3] $N \gg 1$ での $P_N(L)$ の漸近形が

$$P_N(L) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left[-\frac{(L - 2N\ell)^2}{2N\ell^2}\right]$$

で与えられることを示せ。($x^2 N \ll 1$ で $[\cos x]^N \simeq \exp[-x^2 N/2]$ が成り立つことを用いよ。)

第5問

次の文章を読んで、下線①～⑤にそれぞれ対応した問[1]～[5]に答えよ。

物質には金属と絶縁体がある。たとえば、① Na 単体は金属であるが、典型的なイオン結晶である NaCl は絶縁体である。金属と絶縁体の厳密な区別は、絶対零度において電気伝導度が有限であるか零であるかによる。金属ではフェルミ準位に有限の電子状態密度が存在し、これは、たとえば低温域の比熱を測定することによって得られる。② 金属の比熱は、低温域で温度 T に比例する項が存在し、その係数がフェルミ準位の状態密度に比例するからである。一方、多くの絶縁体では、低温域で格子振動(フォノン)の寄与により、比熱は T^3 に比例することが知られている。③ 金属の大きな特徴のひとつは、特有の金属光沢(赤外・可視光域に高い反射率)を示すことであるが、実はこれも金属中の多数の自由電子の運動に関係している。

金属がある摂動によって、絶縁体に変化する現象も広くみられる。特に、自由電子の運動が1次元的な方向(座標 x)に限られた場合には、このような変化は普遍的に起こることが知られており、これをパイエルス転移とよぶ。以下連続体近似で考えよう。電子の有効質量を m^* とし、1次元的な電子の伝導バンドを考える。このとき基本単位格子(長さを a とする)あたりの伝導電子の個数を n とする。パイエルス転移では、④ フェルミ波数を k_F としたときに、ちょうど $2k_F$ の波数で格子の変調が起こり、実効的に $V \cos(2k_F x)$ のポテンシャルエネルギーの変化(V は格子のひずみに比例したエネルギー振幅)が系に加わり、 $\pm k_F$ の波数のところでバンドにギャップが開くのである。これは、格子を歪ませる弾性エネルギーの損失よりも、フェルミ準位位置でギャップを開き、電子系の全エネルギーを低くする利得の方が1次元系では常に大きくなるからである。このように元のフェルミ準位でギャップの開いた状態は一種の半導体であり、⑤ そのギャップの大きさ Δ は、たとえば光吸収の測定で求めることができる。

- [1] その理由を簡潔に述べよ。
- [2] その理由を自由電子モデルの考え方に基づいて簡潔に述べよ。
- [3] 金属光沢が現れる理由を簡潔に述べよ。
- [4] この状況を1次元のバンド構造(エネルギーと波数の関係)で図示し、フェルミ波数 k_F の値および形成されるギャップ Δ の大きさも書き入れよ。
- [5] この場合の光吸収スペクトル(光吸収強度の光子エネルギー依存性)を定性的に図示して、ギャップエネルギー Δ 付近の特徴を述べよ。

第6問

$n \times n$ 実対称行列 A と任意の n 次元縦ベクトル \mathbf{u}_0 が与えられたとき、行列 A を 3 重対角化する問題を考える。ただし、 n 個のベクトル $\mathbf{u}_0, A\mathbf{u}_0, A^2\mathbf{u}_0, \dots, A^{n-1}\mathbf{u}_0$ は互いに線形独立であるとする。

\mathbf{u}_0 をもとにして、互いに直交する規格化されたベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n$ を次のような演算により生成する。

$$\gamma_0 \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 \tag{1}$$

$$\gamma_1 \mathbf{u}_2 = A\mathbf{u}_1 - \alpha_1 \mathbf{u}_1 \tag{2}$$

$$\gamma_2 \mathbf{u}_3 = A\mathbf{u}_2 - \alpha_2 \mathbf{u}_2 - \beta_{2,1} \mathbf{u}_1 \tag{3}$$

$$\gamma_3 \mathbf{u}_4 = A\mathbf{u}_3 - \alpha_3 \mathbf{u}_3 - \beta_{3,1} \mathbf{u}_1 - \beta_{3,2} \mathbf{u}_2 \tag{4}$$

⋮

$$\gamma_j \mathbf{u}_{j+1} = A\mathbf{u}_j - \alpha_j \mathbf{u}_j - \beta_{j,1} \mathbf{u}_1 - \beta_{j,2} \mathbf{u}_2 - \dots - \beta_{j,j-1} \mathbf{u}_{j-1} \tag{5}$$

⋮

$$\gamma_{n-1} \mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n-1} - \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} - \beta_{n-1,1} \mathbf{u}_1 - \beta_{n-1,2} \mathbf{u}_2 - \dots - \beta_{n-1,n-2} \mathbf{u}_{n-2} \tag{6}$$

ただし、 γ_i は \mathbf{u}_{i+1} ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) の規格化のために導入された正定数であり、また α_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) は \mathbf{u}_{i+1} が \mathbf{u}_i と直交するように、 $\beta_{i,j}$ ($i = 2, 3, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, i-1$) は \mathbf{u}_{i+1} が \mathbf{u}_j と直交するように決められた定数である。

[1] 上式 ((2)~(6)) で

$$\beta_{3,1} = \beta_{4,1} = \dots = \beta_{n-1,1} = 0$$

$$\beta_{4,2} = \beta_{5,2} = \dots = \beta_{n-1,2} = 0$$

⋮

$$\beta_{j+1,j-1} = \beta_{j+2,j-1} = \dots = \beta_{n-1,j-1} = 0$$

⋮

$$\beta_{n-1,n-3} = 0,$$

すなわち、 $i \geq 3$ かつ $i-2 \geq j$ のとき $\beta_{i,j} = 0$ が成り立つことを示せ。

[2] 上式 ((2)~(6)) で $\gamma_j = \beta_{j+1,j}$ ($j = 1, 2, \dots, n-2$) であることを証明せよ。

[3] 式 (6) により求められたベクトル \mathbf{u}_n について、 $A\mathbf{u}_n$ は \mathbf{u}_{n-1} と \mathbf{u}_n のみで表されること、すなわち適当な $\alpha_n, \beta_{n,n-1}$ を用いて、

$$A\mathbf{u}_n = \alpha_n \mathbf{u}_n + \beta_{n,n-1} \mathbf{u}_{n-1} \tag{7}$$

と書けることを示せ。またここで $\beta_{n,n-1} = \gamma_{n-1}$ であることを証明せよ。

[4] α_j ($j = 1, 2, \dots, n$), $\beta_{j+1,j} = \gamma_j$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) を $A, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_{j+1}$ のみを用い、他の α_l や γ_l を用いずに、表せ。

[5] 上の手続きにより、行列 A は以下の三重対角行列 B に変換されることを示せ。

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & & & \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & 0 & & \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \gamma_3 & \ddots & \\ & 0 & \gamma_3 & \alpha_4 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ & & & 0 & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

第7問

m 個の数値を並べたデータ列 $a_0a_1a_2\cdots a_{m-1}$ を考える。各要素 a_i ($0 \leq i \leq m-1$) の取りうる値は 0 から 7 までの整数であるとする。これを記録するときに、データ列の持つ性質によってはデータを圧縮することができる。データの可逆圧縮の方法（元のデータを完全に再現できる圧縮法）に関する以下の問に答えよ。

- [1] データ列 $a_0a_1a_2\cdots a_{m-1}$ の各要素の出現確率が一樣な場合、データ列の情報のエントロピーを求めよ。ただし、情報のエントロピーの定義は注1参照。
- [2] データ列 $a_0a_1a_2\cdots a_{m-1}$ に、隣り合う要素 a_i と a_{i+1} が急激には変化し難いような性質があったとする。例えば、隣り合う要素の差を $b_i = a_i - a_{i-1}$ として、 b_i が -7 から 7 までの各値をとる確率 $p(b_i)$ が次の表1のように与えられていたとする（注2参照）。このとき b_i の情報のエントロピーを求めよ。

表1

b_i	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7
$p(b_i)$	2^{-1}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-8}

- [3] データ列 $a_0a_1a_2\cdots a_{m-1}$ を $a_0b_1b_2\cdots b_{m-1}$ で置き換え、さらに b_i の取りうる -7 から 7 までの各値を表2のように桁数の異なる 0 と 1 からなる数字の列に置き換える。これにより、符号化された b_i の桁数の期待値はいくらになるか。
- [4] 表2に基づく符号化を行ったことにより、なぜデータの圧縮が可能になったのか。その理由を簡潔に述べよ。
- [5] 文字列「2133666553」を上記の規則に従って $a_0b_1b_2\cdots b_{m-1}$ の形に符号化せよ。ただし、 a_0 はもとの数値をそのまま 3 ビットの 2 進数で表せ。
- [6] 符号化されたデータ「0011110011100011101010100101」から元の文字列を復元せよ。ただし、先頭の a_0 はもとの数値がそのまま 3 ビットの 2 進数で表わされている。

表 2

-7	11111111
-6	11111101
-5	1111101
-4	111101
-3	11101
-2	1101
-1	101
0	0
1	100
2	1100
3	11100
4	111100
5	1111100
6	11111100
7	11111110

注 1) 情報のエントロピー H の定義

あるひとまとまりの離散的情報 A があり、その取りうる値 (文字、数値、その他) が v_k ($1 \leq k \leq N$) であり、各 v_k の出現確率が $p(v_k)$ であるとき、 v_k の情報量は、

$$\log_2 \left(\frac{1}{p(v_k)} \right)$$

で定義され、 A の情報のエントロピー H は、情報量の期待値として、

$$H = \sum_{k=1}^N p(v_k) \log_2 \left(\frac{1}{p(v_k)} \right)$$

で定義される。

注 2) 実際には個々の b_i の出現確率は a_{i-1} に依存するが、表 1 に示した $p(b_i)$ は、データ列全体での平均の出現確率を表している。